2026학년도 수학과 중등교사임용시험 수학전공 문항별 해설

[전공A]

기입형 문항 2 (2점)	500, 50 $\mathrm{V}(X+Y) = \mathrm{V}(X) + \mathrm{V}(Y) = 400^2 + 300^2 = 500^2$, $X+Y$ 의 표준편차 $\sigma(X+Y) = \sqrt{\mathrm{V}(X+Y)} = 500$ $c = \sqrt{\dfrac{400^2}{100} + \dfrac{300^2}{100}} = 50$
기입형 문항 3 (2점)	$6\pi i$, 5 $\displaystyle\int_{C(2)} \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = 2\pi i\,(N-P) = 2\pi i\,(9-6) = 6\pi i$ $\displaystyle\int_{C(r)} \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = 0$ 을 만족하는 r 은 $\lvert 1-4i\rvert = \sqrt{17} < r < \sqrt{85} = \lvert 9-2i\rvert$ 이며 양의 정수 r 은 5,6,7,8,9. 따라서 5개.
기입형 문항 4 (2점)	$\dfrac{1}{2}$, $\dfrac{1}{3}$ $\alpha(s)\cdot T(s) = 0$ 을 미분하면 $T\cdot T + \alpha\cdot\kappa N = 0$, $1 + \kappa\,\alpha\cdot N = 0$, $1 - 2s^2\kappa(s) = 0$. $\kappa(s) = \dfrac{1}{2s^2}$, $\kappa(1) = \dfrac{1}{2}$. $\alpha(s)\cdot N(s) = -2s^2$ 미분하면 $\tau(s)\,\alpha(s)\cdot B(s) = -4s$, $\tau(1)\,\alpha(1)\cdot B(1) = -4$, $12\tau(1) = -4$. $\lvert\tau(1)\rvert = \dfrac{1}{3}$.
문항 7 (4점)	점화식의 특성다항식은 $x^2 - 4x + 4$. 수열 $\{a_n\}$ 의 일반항은 $a_n = n\cdot 2^n$. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n = 4\sum_{n=2}^{\infty} a_{n-1}x^n - 4\sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2}x^n$, $f(x) - 2x = 4xf(x) - 4x^2f(x)$, $(1-4x+4x^2)f(x) = 2x$, $f(x) = \dfrac{2x}{(1-2x)^2}$. $\displaystyle x\left(f(\frac{x}{2})\right)^3 = \frac{x^4}{(1-x)^6} = x^4(1-x)^{-6} = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{-6}{k}(-1)^k x^{k+4} = \sum_{n=4}^{\infty}\binom{-6}{n-4}(-1)^{n-4}x^n$. $b_n = \begin{cases} 0 & , n=0,1,2,3 \\ {}_{n+1}\mathrm{C}_5 & , n \geq 4 \end{cases}$
문항 8 (4점)	$f(x,y) = f(x,tx) = x^4 + t^4x^4 - t^2x^3 = 0$, $x = \dfrac{t^2}{1+t^4}$. 원점 이외의 교점의 좌표는 $(x,y) = \left(\dfrac{t^2}{1+t^4}, \dfrac{t^3}{1+t^4}\right)$, $t \neq 0$. 곡선 $c(t) = \left(\dfrac{t^2}{1+t^4}, \dfrac{t^3}{1+t^4}\right)$, $0 \leq t$ 라 놓으면 $c(t)$ 는 폐곡선을 이루며, 폐곡선 $c(t)$ 가 둘러싼 영역이 문제에 주어진 영역 $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid f(x,y)\leq 0,\ y\geq 0\}$ 과 같다. 폐곡선 $c(t)$ 가 둘러싼 영역 D 의 넓이는 $\displaystyle\iint_D 1\,dA$ 이며, 그린정리에 따라 $\displaystyle\iint_D 1\,dA = \int_c -\frac{y}{2}dx + \frac{x}{2}dy$ 와 같다. $c(t)$ 의 점 (x,y) 는 $y = tx$ 를 만족하며, $y' = x + tx'$, $-y\,dx + x\,dy = x^2dt$. $\displaystyle\iint_D 1\,dA = \int_c -\frac{y}{2}dx + \frac{x}{2}dy = \int_c \frac{1}{2}x^2\,dt = \int_0^{\infty}\frac{1}{2}\frac{t^4}{(1+t^4)^2}dt = \int_0^{\infty}\frac{t}{8}\frac{4t^3}{(1+t^4)^2}dt = \frac{1}{8}\int_0^{\infty}\frac{1}{1+t^4}dt = \frac{\sqrt{2}\,\pi}{32}$.
문항 9 (4점)	문제의 조건으로부터 4, 10 은 A 의 고윳값이며, $\det(A)$ 은 A 의 모든 고윳값의 곱이다. A 의 모든 고윳값은 4, 10, 20. $Au = 4u$, $Av = 10v$, $Aw = 20w$, $u^T = (1,2,2)$, $v^T = (2,-2,1)$, $w \neq \vec{0}$. $\det(B) = d$ 라 놓으면 $AB = 2\det(B)I$, $A = 2\det(B)B^{-1}$, $Bu = \dfrac{d}{2}u$, $Bv = \dfrac{d}{5}v$, $Bw = \dfrac{d}{5}w$. B 의 고윳값은 $\dfrac{d}{2}, \dfrac{d}{5}, \dfrac{d}{10}$ 이며, $\dfrac{d}{2}\times\dfrac{d}{5}\times\dfrac{d}{10} = d$, $tr(B) < 0$ 이므로 $d = -10$. 따라서 B 의 모든 고윳값은 $-5, -2, -1$ 이며 대응하는 고유벡터는 u, v, w . B 는 대칭행렬이므로 w 는 u, v 와 수직. 따라서 B 의 고유벡터로 구성된 정규직교기저는 $\left\{\dfrac{1}{3}(1,2,2), \dfrac{1}{3}(2,-2,1), \dfrac{1}{3}(2,1,-2)\right\}$.
문항10 (4점)	$[-L, L]$ 에서 $\lvert f_n(x)\rvert = \left\lvert\dfrac{x^4+\sqrt{n}x^3}{n(x^2+2\sqrt{n}x+2n)}\right\rvert \leq \dfrac{L^3\lvert x+\sqrt{n}\rvert}{n\{(x+\sqrt{n})^2+n\}} = \dfrac{L^3}{n}\dfrac{\lvert x+\sqrt{n}\rvert}{(x+\sqrt{n})^2+n} \leq \dfrac{L^3}{n}\dfrac{1}{2\sqrt{n}} \leq \dfrac{L^3}{n^{1.5}}$. p-급수판정법에 따라 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{L^3}{n^{1.5}}$ 는 수렴한다. 따라서 Weierstrass M-판정법에 따라 $[-L, L]$ 에서 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)$ 는 균등수렴한다. 임의의 실수 $a\in\mathbb{R}$ 에 대하여 $\lvert a\rvert < L$ 을 만족하는 양의 실수 L 이 존재하며, 구간 $[-L, L]$ 에서 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)$ 는 균등수렴하고, $f_n(x)$ 는 연속함수들의 연산이므로 a 에서 연속이다. 따라서 극한함수 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)$ 는 실수전체 $\mathbb{R}$ 에서 연속이다.
문항11 (4점)	$\mathrm{Im}(\phi)$ 는 순환군 $\mathbb{Z}_{200}$ 의 부분군이므로 라그랑주정리에 따라 $\mathrm{Im}(\phi)$ 의 위수는 200의 약수이며, 순환부분군이다. 제1동형정리에 따라 $\mathrm{Im}(\phi)$ 는 $(\mathbb{Z}_{20}\times\mathbb{Z}_{26})/\ker(\phi)$ 과 동형이며 $(\mathbb{Z}_{20}\times\mathbb{Z}_{26})/\ker(\phi)$ 의 위수는 $\mathbb{Z}_{20}\times\mathbb{Z}_{26}$ 의 위수의 약수이다. $\mathrm{Im}(\phi)$ 의 위수는 200과 20×26 의 공통 약수이므로 $\gcd(200, 20\times 26) = 2^3\times 5$ 의 약수. 따라서 순환부분군 $\mathrm{Im}(\phi)$ 는 부분군을 6개 가지므로 $\mathrm{Im}(\phi)$ 의 위수는 20. $\mathrm{Im}(\phi)$ 는 $(\mathbb{Z}_{20}\times\mathbb{Z}_{26})/\ker(\phi)$ 과 동형이므로 $20 = \dfrac{20\times 26}{\lvert\ker(\phi)\rvert}$. 따라서 $\mathrm{Ker}(\phi)$ 의 위수는 26.
문항12 (4점)	$d((-1,0),(x,0)) = \min\{\lvert 1-x\rvert, \lvert -1-x\rvert, \lvert -3-x\rvert\} = \min\{\lvert x-1\rvert, \lvert x+1\rvert\} \leq \dfrac{1}{2}$, $-1\leq x\leq -\dfrac{1}{2}$ 또는 $\dfrac{1}{2}\leq x < 1$. 문제의 집합에 속하는 점의 x 좌표 중 가장 작은 양의 실수는 $\dfrac{1}{2}$. 점열 $P_n = \left(0, \dfrac{1}{n}\right)\in\mathbb{R}^2_*$ 이라 놓고, 점열 $Q_n = \left(\dfrac{1}{2}, -\ln(n)\right)\in A$ 이라 하자. $f(Q_n) = P_n$ 이므로 $f^{-1}(P_n) = Q_n$. $d_*(P_{2n}, P_n) = d(f^{-1}(P_{2n}), f^{-1}(P_n)) = d(Q_{2n}, Q_n) = \lvert\ln(2n) - \ln(n)\rvert = \ln 2$. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} d_*(P_{2n}, P_n) = \ln 2 \neq 0$. 따라서 점열 $\{P_n\}$ 은 코시수열이 아니다.

[전공B]

기입형 문항 2 (2점)	$\mathfrak{I}_{\mathbb{Z}} = \{\varnothing, \{0\}, \{0,1,2\}, \{0,1,2,3,4\}, \mathbb{Z}\}$, $A^o = \{0,1,2\}$
문항 6 (4점)	$1 = \int_0^\infty f(x)\,dx = \int_0^2 \frac{c}{16}x\,dx + \int_2^\infty \frac{c}{x^3}\,dx = \frac{c}{8}+\frac{c}{8} = \frac{c}{4}$, $c = 4$. $\mathrm{P}(X\ge 4) = \int_4^\infty \frac{4}{x^3}\,dx = \frac{1}{8}$. 임의로 4개의 제품을 선택했을 때, 우수 제품의 수를 Y라 놓으면 Y는 이항분포 $\mathrm{B}(4,\frac{1}{8})$에 따른다. 우수 제품이 일반 제품보다 더 많이 포함되어 있을 확률은 $\mathrm{P}(Y\ge 3) = {}_4C_4(\frac{1}{8})^4 + {}_4C_3(\frac{1}{8})^3\frac{7}{8} = \frac{29}{8^4} = \frac{29}{4096}$.
문항 7 (4점)	$\gcd(21,66) = 3 \mid 45$ 이므로 A의 원소 개수는 $\gcd(21,66) = 3$개. $x^3-1 \equiv 0 \pmod{151}$는 해를 가지므로 오일러규준을 적용할 때, 해의 개수는 $\gcd(3,\phi(151)) = \gcd(3,150) = 3$개. $3 = \|A\| = \|B\cup C\| \ge \|B\| = 3$ 이므로 $B\cup C = B$ 이며 $C\subset B$. 법151의 원시근을 a라 놓을 때, $B = \{a^0, a^{50}, a^{100}\}$, $C = \left\{a^x \,\middle\|\, x = \frac{150}{\gcd(n,150)}\text{의 배수}\right\}$이므로 $C\subset B$을 만족할 필요충분조건은 $\gcd(n,150) \mid 3$. 즉, $\gcd(n,150) = 1$ 또는 3. $\gcd(n,150) = 1$인 n의 개수는 $\phi(150)$개. $\gcd(n,150) = 3$인 n의 개수는 $\phi(\frac{150}{3})$개. 따라서 n의 개수는 $\phi(150)+\phi(\frac{150}{3}) = 40+20 = 60$.
문항 8 (4점)	$u(x,y) = \frac{x+ay}{x^2+y^2}+x^2+by^2$, $v(x,y) = \frac{cy}{x^2+y^2}+dxy$ 라 놓자. $u_x = \frac{y^2-x^2-2axy}{(x^2+y^2)^2}+2x$, $u_y = \frac{ax^2-2xy-ay^2}{(x^2+y^2)^2}+2by$ $v_x = \frac{-2cxy}{(x^2+y^2)^2}+dy$, $v_y = \frac{cx^2-cy^2}{(x^2+y^2)^2}+dx$ 코시-리만 정리를 적용 $u_x = v_y$, $u_y = -v_x$. 식을 풀면 $a = 0$, $b = -1$, $c = -1$, $d = 2$. $f(z) = \frac{x}{x^2+y^2}+x^2-y^2+i\left(\frac{-y}{x^2+y^2}+2xy\right) = \frac{1}{z}+z^2$. $e^{\frac{1}{z}}f(z) = e^{\frac{1}{z}}\left(\frac{1}{z}+z^2\right) = \left(\frac{1}{z}+z^2\right)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!\,z^n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n-1)!}z^{-n} + \sum_{n=-2}^{\infty}\frac{1}{(n+2)!}z^{-n}$. 따라서 $a_{-1} = 1+\frac{1}{6} = \frac{7}{6}$.
문항 9 (4점)	$\mathbb{Z}_7$에서 $f(x)$는 근을 갖지 않으므로 $f(x)$는 1차 인수를 갖지 않는다. $f(x) = (x^2+ax+b)(x^2+cx+d)$이라 가정하자. $x^4+3x^2-1 = x^4+(a+c)x^3+(ac+b+d)x^2+(ad+bc)x+bd$, $a+c=0$, $ac+b+d=3$, $ad+bc=0$, $bd = -1$. $a+c=0$, $ad+bc = 0$를 연립하여 $a(d-b) = 0$ 이며 $a = 0$ 또는 $b=d$. $a=0$인 경우, $c=0$, $b+d=3$, $bd = -1$. $\mathbb{Z}_7$에서 x^2-3x-1이 해를 갖지 않으므로 b, d는 존재하지 않는다. $b=d$인 경우, $b^2 = -1$. 그런데 $\left(\frac{-1}{7}\right) = -1$이므로 b는 존재하지 않는다. 따라서 $f(x)$는 1차 인수와 2차 인수를 갖지 않으며, $\mathbb{Z}_7[x]$에서 기약다항식이다. 갈루아정리를 적용하면 $\|G(\mathbb{Z}_7(\alpha)/\mathbb{Z}_7)\| = [\mathbb{Z}_7(\alpha):\mathbb{Z}_7] = \deg(\alpha;\mathbb{Z}_7) = \deg(f(x)) = 4$이므로 σ는 갈루아군 $G(\mathbb{Z}_7(\alpha)/\mathbb{Z}_7)$의 생성원이다. 갈루아정리를 적용하면 $G(\mathbb{Z}_7(\alpha)/E) = \langle\sigma^2\rangle$이며 $\|G(\mathbb{Z}_7(\alpha)/E)\| = 2$. 따라서 $[E:\mathbb{Z}_7] = \|G(E/\mathbb{Z}_7)\| = 4/2 = 2$ 이며 고정체 E의 위수는 $7^2 = 49$.
문항10 (4점)	$S = \left\{\frac{f(x)}{x} \,\middle\|\, x>0\right\} = \left\{\frac{1}{x}e^{-\frac{1}{x^2}} \,\middle\|\, x>0\right\} = \{te^{-t^2} \mid t>0\}$. $\lim_{t\to 0} te^{-t^2} = 0$, $\lim_{t\to\infty} te^{-t^2} = 0$ 이며 $te^{-t^2} > 0$. $(te^{-t^2})' = (1-2t^2)e^{-t^2} = 0$, $t = \frac{1}{\sqrt{2}}$. 최댓값 $\frac{1}{\sqrt{2e}}$. 따라서 하한 $\inf(S) = 0$, 상한 $\sup(S) = \frac{1}{\sqrt{2e}}$. $0<x$ 일 때, $\frac{f(x)}{x} < 1$, $f(x) < x$. $0 \le \int_0^1 \frac{f(x)}{s}e^{-\frac{x^2}{s^2}}\,dx \le \int_0^1 \frac{x}{s}e^{-\frac{x^2}{s^2}}\,dx = \frac{s}{2}-\frac{s}{2}e^{-\frac{1}{s^2}}$. $\lim_{s\to 0+}\left(\frac{s}{2}-\frac{s}{2}e^{-\frac{1}{s^2}}\right) = 0$. 따라서 조임정리에 따라 $\lim_{s\to 0+}\int_0^1 \frac{f(x)}{s}e^{-\frac{x^2}{s^2}}\,dx = 0$.
문항11 (4점)	α와 β의 측지곡률이 0 이므로 $x=0$과 $x=\frac{2}{3}$에서 $f'(1) = f'(\frac{2}{3}) = 0$. $f'(x)$는 최소차항의 계수가 6인 2차함수이므로 $f'(x) = 6x(x-\frac{2}{3}) = 6x^2-4x$. 따라서 $f(x) = 2x^3-2x^2+c$ (c는 상수)라 쓸 수 있다. γ의 측지곡률이 $\frac{2}{5}$ 이며 $f'(1) = 2$, $f(1) = c > 0$ 이므로 $5 = \sqrt{5}\,c$, $c = \sqrt{5}$. 따라서 $f(0) = c = \sqrt{5}$. 회전면 M의 단위법벡터를 바깥방향으로 정할 때, 위선 α의 주곡률은 $-\frac{1}{\sqrt{5}}$ 이며, $x=0$에서 경선 $y=f(x)$의 주곡률은 $\frac{f''(0)}{\sqrt{1+(f'(0))^2}^3} = -4$. 따라서 α의 점에서 가우스곡률은 $K = \frac{4}{\sqrt{5}}$.

(문항11 오류) $f(x) = 2x^3-2x^2+\sqrt{5}$ 는 $-1<x<2$ 에서 $f(x)>0$ 조건을 만족하지 않는다.
그런데 문제의 주요 대상을 이루는 α, β, γ가 놓인 $0\le x\le 1$ 에서 $f(x)>0$ 조건을 만족한다. 즉, 미분기하의 문제를 해결하는데 영향을 주지 않는다. 다만 학교수학 수준의 부등식이 성립하지 않는다는 점은 출제 부주의로 보여 아쉬움이 있다.

※ 위의 답안 예시는 가능한 여러 가지 답안 중 한 가지이므로 참고 용도로 사용하세요. 편집상의 오류가 있을 수 있습니다.