970호-16,17,22

2017년 하반기·2018년 9급 시험대비 수학 모의고사

박한일 | 박문각남부고시학원

1. 첫째항이 22이고 공차가 -4인 등차수열에서 첫째항부터 제 몇 항까지의 합이 처음으로 음수가 되는가?

① 제10항
② 제11항
③ 제12항
④ 제13항

2. $9^{\frac{3}{2}}\times 27^{-\frac{2}{3}}$의 값은?

① $\frac{1}{3}$
② 1
③ $\sqrt{3}$
④ 3

3. 자연수 n에 대하여 $f(n)=\frac{1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2}{3+5+7+\cdots+(2n+1)}$일 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{f(n)}{n}$의 값은?

① $\frac{1}{4}$
② $\frac{1}{3}$
③ $\frac{5}{12}$
④ $\frac{1}{2}$

4. 함수 $f(x)=\begin{cases}\frac{x^2+x-2}{x-1} & (x\neq 1)\\ k & (x=1)\end{cases}$가 x=1에서 연속일 때, 상수 k의 값은?

① 0
② 1
③ 2
④ 3

5. 함수 f(x)=x^2+2x에 대하여 $\lim_{x \to 1} \frac{f(x)-3}{x-1}$의 값은?

① 1
② 2
③ 3
④ 4

6. 곡선 $f(x)=\frac{2}{3}x^3+ax$ 위의 두 점 (0, f(0)), (1, f(1)) 에서의 접선이 서로 수직일 때, 상수 a의 값은?

① -2
② -1
③ 0
④ 1

7. $\int_0^2 (x^2+1)\,dx - \int_0^2 x^2\,dx$의 값은?

① -2
② -1
③ 0
④ 2

8. 서로 다른 종류의 7송이 꽃이 있다. 2송이, 2송이, 3송이씩 포장하여 3명의 친구에게 각각 선물하는 방법의 수는?

① 600
② 610
③ 620
④ 630

9. 두 사건 A, B가 서로 독립이고 P(A)=$\frac{1}{2}$, P(A∪B)=$\frac{2}{3}$ 일 때, P(B|A)의 값은?

① $\frac{1}{6}$
② $\frac{1}{3}$
③ $\frac{1}{2}$
④ $\frac{2}{3}$

10. 모집인원이 200명인 어느 회사의 입사시험에 1,000명의 수험생이 응시하였다. 수험생의

점수는 평균이 156점이고 표준편차가 20점인 정규분포를 따른다고 할 때, 주어진 표준정규분포표를 이용하여 합격하기 위한 최저 점수을 구하면?

<표준정규분포표>

z	$P(0 \leqq Z \leqq z)$
0.52	0.20
0.67	0.25
0.84	0.30
1.00	0.34

① 166.4점
② 168.8점
③ 169.4점
④ 172.8점

11. $x+y=4$, $xy=-2$일 때, $x^3+y^3-x^2-y^2$ 의 값은?
① -40
② -16
③ 20
④ 68

12. 다항식 $f(x)$를 $x-1$로 나눈 몫은 $Q(x)$이고 나머지는 1, $Q(x)$를 $x-2$로 나눈 몫은 $Q1(x)$이고 나머지는 2, $Q_1(x)$를 $x-3$으로 나눈 몫은 $Q_2(x)$이고 나머지는 3일 때, $f(x)$를 $x-3$으로 나눈 나머지는?
① 8
② 9
③ 10
④ 11

13. 이차방정식 $x^2-6x+k+3=0$ 의 두 근이 모두 양수가 되도록 하는 실수 k의 값의 범위는?
① $k < -3$
② $-3 < k \leq 6$
③ $k \geq 6$
④ $k \leq 6$

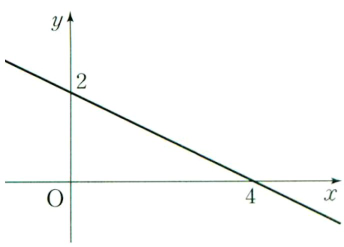
14. $|x| \leq 1$에서 이차함수 $y=4x^2-2x-2$의 최댓값과 최솟값의 곱은?
① -9
② $-\frac{5}{4}$
③ -1
④ 1

15. 연립부등식 $\begin{cases} |3x-1|>5 \\ x^2-3x-18<0 \end{cases}$ 을 만족하는 정수 x의 개수는?

① 2
② 3
③ 4
④ 5

16. 두 직선 3x-4y+5=0과 3x-4y+k=0 사이의 거리가 1일 때, 양수 k의 값은?
① 4
② 6
③ 8
④ 10

17. 오른쪽 그림과 같은 직선을 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 직선을 다시 y축에 대하여 대칭이동하였다. 옮겨진 직선의 기울기는?



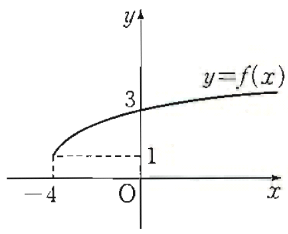
① -2
② $-\frac{1}{2}$
③ $\frac{1}{4}$
④ $\frac{1}{2}$

18. 두 양수 a, b에 대하여 3a+4b=2일 때, $\frac{4}{a}+\frac{3}{b}\geq k$를 만족하는 k의 최댓값은?
① 12
② 16
③ 20
④ 24

19. 두 함수 f(x)=x+1, g(x)=2x-3 일 때, $f^{-1}(3)+g^{-1}(3)$의 값은?
① 5

② 4
③ 3
④ 2

20. 그림은 무리함수 f(x)= $\sqrt{x+a}$ +b 의 그래프이다. 함수 y=f(x)의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점이 (p, q) 일 때, p+q 의 값은? (단, a, b는 상수이다.)



① 3+ $\sqrt{15}$
② $3+3\sqrt{2}$
③ $3+\sqrt{21}$
④ $3+2\sqrt{6}$

[정답 및 해설]
1. ④
등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n 이라고 하면
$$S_n=\frac{n\{2\cdot 22+(n-1)\cdot(-4)\}}{2}=-2n^2+24n$$
$-2n^2+24n < 0$에서 $n^2-12n > 0$
$n(n-12) > 0$
∴ $n > 12$ (∵ $n > 0$)
따라서 주어진 등차수열은 첫째항부터 제13항까지의 합이 처음으로 음수가 된다.

2. ④
지수법칙을 이용하여 식을 정리하면
$$9^{\frac{3}{2}}\times 27^{-\frac{2}{3}}=(3^2)^{\frac{3}{2}}\times(3^3)^{-\frac{2}{3}}=3^3\times 3^{-2}=3^{3+(-2)}=3$$

3. ②
$$f(n)=\frac{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}{\frac{n(3+2n+1)}{2}}=\frac{2n^2+3n+1}{6n+12}$$
따라서 $\lim_{n\to\infty}\frac{f(n)}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+3n+1}{6n^2+12n}=\frac{1}{3}$

4. ④
f(x)가 x=1에서 연속이므로 $\lim_{x\to1}f(x)=f(1)=k$이다.

$$k=\lim_{x\to1}f(x)=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x+2)}{x-1}=\lim_{x\to1}(x+2)=3$$

∴ k=3

5. ④
f(1)=3이므로

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)$$

f'(2)=2x+2
 따라서 f'(1)=4

6. ②
$f'(x)=2x^2+a$에서 f'(0)=a, f'(1)=2+a
그러므로 a(2+a)=-1, $(a+1)^2=0$
따라서 a=-1

7. ④

$$\int_0^2(x^2+1)\,dx-\int_0^2x^2\,dx=\int_0^2 1\,dx=2$$

8. ④
7송이 꽃 중 2송이를 선택하는 방법의 수 : ${}_7C_2=21$(가지)
나머지 5송이 중 2송이를 선택하는 방법의 수 : ${}_5C_2=10$(가지)
나머지 3송이 중 4송이를 선택하는 방법의 수 : ${}_3C_3=1$(가지)

∴ (선물하는 방법의 수)= ${}_7C_2\times{}_5C_2\times{}_3C_3\times\frac{1}{2!}\times3!$

$$=21\times10\times\frac{1}{2}\times6=630$$

9. ②
두 사건 A, B가 독립이므로 P(A∩B)=P(A)P(B)가 성립한다.
P(A∪B)=P(A)+P(B)-P(A∩B)
=P(A)+P(B)-P(A)P(B)
$=\frac{1}{2}+P(B)-\frac{1}{2}P(B)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}P(B)=\frac{2}{3}$

$\therefore P(B)=\frac{1}{3}$

$\therefore P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{P(A)P(B)}{P(A)}=P(B)=\frac{1}{3}$

10. ④

모집인원 200명에 응시자가 1000명이므로 합격률은 $\frac{200}{1000}=0.2$

이때, 확률변수 X의 최솟값, 즉 합격하지 위한 최저 점수를 k라 하자.

$P(X \geq k)=P(Z \geq \frac{k-156}{20})=0.2$ …㉠

표준정규분포표에서 $P(0 \leq Z \leq 0.84)=0.3$이므로

$P(Z \geq 0.84)=0.5-P(0 \leq Z \leq 0.84)=0.2$…㉡

㉠=㉡에서 $\frac{k-156}{20}=0.84$

$\therefore k=172.8$

따라서 합격하기 위한 최저 점수는 172.8이다.

11. ④

$x^3+y^3-x^2-y^2=(x^3+y^3)-(x^2+y^2)$

$=(x+y)^3-3xy(x+y)-\{(x+y)^2-2xy\}$

$=4^3-3\cdot(-2)\cdot 4-\{4^2-2\cdot(-2)\}=68$

12. ④

다항식 f(x)를 x-1로 나눈 몫은 Q(x)이고 나머지는 1이므로

$f(x)=(x-1)Q(x)+1$ ……㉠

Q(x)를 x-2로 나눈 몫은 $Q_1(x)$이고 나머지는 2이므로

$Q(x)=(x-2)Q_1(x)+2$ ……㉡

$Q_1(x)$를 x-3으로 나눈 몫은 $Q_2(x)$이고 나머지는 3이므로

$Q_1(x)=(x-3)Q_2(x)+3$ ……㉢

㉢을 ㉡에 대입하면

$Q(x)=(x-2)\{(x-3)Q_2(x)+3\}+2$

$=(x-2)(x-3)Q_2(x)+3x-4$ ……㉣

㉣을 ㉠에 대입하면

$f(x)=(x-1)Q(x)+1$

$=(x-1)\{(x-2)(x-3)Q_2(x)+3x-4\}+1$

$=(x-1)(x-2)(x-3)Q_2(x)+(x-1)(3x-4)+1$

$=(x-1)(x-2)(x-3)Q_2(x)+3x^2-7x+5$

따라서 f(x)를 x-3으로 나눈 나머지는

$f(3)=3\ 3^2-7\ 3+5=11$

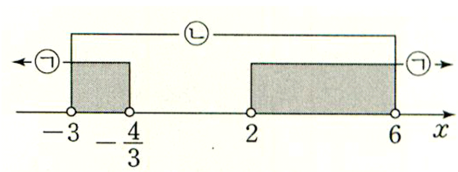
13. ②

$x^2-6x+k=0$의 판별식을 D, 두 근을 α, β라고 하면 두 근이 모두 양수이므로

(i) $\frac{D}{4}=(-3)^2-(k+3)\geq 0$ ∴ $k \leq 6$
(ii) $\alpha+\beta=6 > 0$
(iii) $\alpha\beta=k+3 > 0$ ∴ $k > -3$
따라서 (i), (ii)의 공통 범위를 구하면 $-3 < k \leq 6$

14. ①
$y=4x^2-2x-2=4\left(x-\frac{1}{4}\right)^2-\frac{9}{4}$
$|x| \leq 1$, 즉 $-1 \leq x \leq 1$이므로 $x=-1$일 때 최댓값 4, $x=\frac{1}{4}$ 일 때 최솟값 $-\frac{9}{4}$ 를 가진다. 따라서 최댓값과 최솟값의 곱은 $4\times\left(-\frac{9}{4}\right)=-9$

15. ③
$|3x-1| > 5$ 에서 $3x-1 < -5$ 또는 $3x-1 > 5$
$\therefore x<-\frac{4}{3}$ 또는 $x > 2$ …㉠
$x^2-3x-18<0$ 에서 $(x+3)(x-6) < 0$
∴ $-3 < x < 6$ …㉡
㉠, ㉡에서 $-3<x<-\frac{4}{3}$ 또는 $2 < x < 6$ 이므로
정수 x는 -2. 3, 4, 5의 4개다.



16. ④
주어진 두 직선은 평행하므로 직선 $3x-4y+5=0$ 위의 한 점 (1, 2)와 직선 $3x-4y+k=0$ 사이의 거리가 1이다.
$\frac{|3-8+k|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=1$
$|k-5|=5$ ⇨ $k-5=\pm5$
∴ $k=10$ (∵ $k > 0$)

17. ④
x절편, y절편이 각각 4, 2이므로 주어진 직선의 방정식은

$\frac{x}{4}+\frac{y}{2}=1$ ∴ x+2y=4

x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동하였으므로 (x-2)+2(y+3)=4

∴ 2+2y=0

다시 y축에 대하여 대칭이동하면 -x+2y=0 $\therefore y=\frac{1}{2}x$

따라서 구하는 직선의 기울기는 $\frac{1}{2}$이다.

18. ④

a > 0, b > 0, 3a+4b=2이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$\frac{3a+4b}{2} \geq \sqrt{3a \cdot 4b}$ (단, 등호는 3a=4b일 때 성립)

$1 \geq \sqrt{12ab}$ ⇨ $1 \geq 12ab$ ($\because ab > 0$) $\therefore \frac{1}{ab} \geq 12$

$\frac{4}{a}+\frac{3}{b}=\frac{3a+4b}{ab}=\frac{2}{ab} \geq 24$이므로 $k \leq 24$

따라서 k의 최댓값은 24이다.

19. ①

일차함수 f(x), g(x) 는 일대일대응이므로 역함수가 존재한다.

$f^{-1}(3)=a$, $g^{-1}(3)=b$라 하면 f(a)=3, g(b)=3이므로

f(a)=a+1=3, g(b)=2b-3=3

∴ a=2, b=3 ⇒ a+b=2+3=5

20. ③

그림에서 시작점의 좌표가 (-4, 1)이므로 a=4, b=1이다. 즉, $f(x)=\sqrt{x+4}+1$이다.

이때, 함수 y=f(x)의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점은 함수 y=f(x)의 그래프와 직선 y=x의 교점과 같으므로

$\sqrt{x+4}+1=x$ ⇨ $\sqrt{x+4}=x-1$ ⇨ $x+4=x^2-2x+1$

⇨ $x^2-3x-3=0$

$\therefore x=\frac{3+\sqrt{21}}{2} (\because x \geq 1)$

즉, $(p,\ q)=\left(\frac{3+\sqrt{21}}{2},\ \frac{3+\sqrt{21}}{2}\right)$이므로 $p+q=3+\sqrt{21}$