974-24,25

바로 보는 수학 모의고사 '오답노트'
유상현·문미란 | 박문각남부고시학원

2. 두 자연수 a, b에 대하여 $a^2b+2ab+a^2+2a+b+1$의 값이 245일 때, a+b의 값은?

① 9
② 10
③ 11
④ 12

[정답] ②
[출제영역] 수학1 - 다항식
[난이도] 중
[정답률] 65%
[해설]
$a^2b+2ab+a^2+2a+b+1$을 a에 대하여 내림차순으로 정리하여 인수분해하면
$(b+1)a^2+2(b+1)a+(b+1)$
$=(b+1)(a^2+2a+1)$
$=(b+1)(a^2+2a+1)$
$=(a+1)^2(b+1)$
위의 식의 값이 $245=7^2\times5$이므로
$(a+1)^2(b+1)=7^2\times5$
a, b는 자연수이므로
a+1=7, b+1=5
따라서 a=6, b=4이므로 a+b=10

4. 모든 실수 x에 대하여 이차부등식 $x^2-2(a-1)x+b-2 \geq 0$이 성립할 때, a+b의 최솟값은 m이다. 4m의 값은? (단, a, b는 실수이다.)

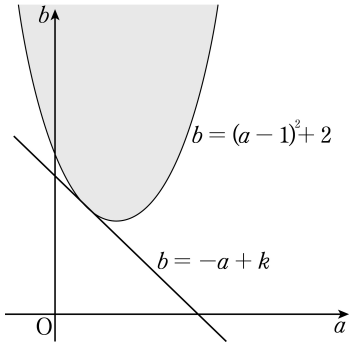
① 11
② 12
③ 13
④ 14

[정답] ①
[출제영역] 수학1 - 방정식과 부등식
[난이도] 상
[정답률] 14%
[해설]
모든 실수 x에 대하여 $x^2-2(a-1)x+b-2 \geq 0$
이므로 이차방정식 $x^2-2(a-1)x+b-2=0$의 판별식을 D_1 이라 하면

$\frac{D_1}{4}$=$(a-1)^2-b+2 \le 0$

따라서 점 (a, b)는 그림과 같은 좌표평면에서 부등식

$b \ge (a-1)^2+2$ ……㉠의 영역에 속한다.



a+b=k라 하면 b=-a+k이므로 기울기가 -1인 직선이 ㉠의 영역을 지나면서 b절편이 최소일 때 a+b의 값이 최소이다.

이는 직선 b=-a+k와 이차함수 $b=(a-1)^2+2$ 가 접할 때이므로 연립하면

$(a-1)^2+2=-a+k$

$a^2-a+3-k=0$

이차방정식 $a^2-a+3-k=0$ 의 판별식을 D_2라 하면

$D_2=1-4(3-k)=0$

$k=\frac{11}{4}$

∴최솟값= $\frac{11}{4}\times4=11$

5. 좌표평면에서 원 $(x+1)^2+(y+2)^2=9$를 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 a만큼 평행이동한 원을 C라 하자. 원 C의 넓이가 직선 3x+4y-7=0에 의하여 이등분되도록 하는 상수 a의 값은?

① $\frac{3}{4}$

② $\frac{5}{4}$

③ $\frac{7}{4}$

④ $\frac{9}{4}$

[정답] ④

[출제영역] 수학1 - 도형의 방정식

[난이도] 중

[정답률] 67%

[해설]

원 C의 방정식은 $\{(x-3)+1\}^2+\{(y-a)+2\}^2=9$
$(x-2)^2+(y-a+2)^2=9$
원 C의 넓이가 직선 3x+4y-7=0에 의하여 이등분되려면 원 C의 중심이 직선 3x+4y-7=0 위에 있어야 한다.
원 C의 중심의 좌표가 (2, a-2) 이므로 3×2+4(a-2)-7=0에서
$a=\frac{9}{4}$

6. 좌표평면에서 연립부등식 $\begin{cases} x^2+y^2 \le 4 \\ y \ge -\sqrt{3}x \\ y \ge \sqrt{3}x-2\sqrt{3} \end{cases}$ 이 나타내는 영역의 넓이는?

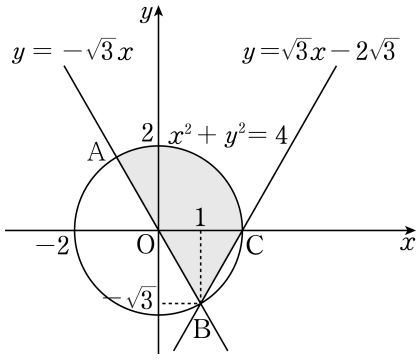
① $\frac{2}{3}\pi+\sqrt{3}$

② $\frac{2}{3}\pi+2\sqrt{3}$

③ $\frac{4}{3}\pi+\sqrt{3}$

④ $\frac{4}{3}\pi+2\sqrt{3}$

[정답] ③
[출제영역] 수학1 - 도형의 방정식
[난이도] 중
[정답률] 28%
[해설]
주어진 부등식의 영역을 좌표평면에 나타내면 다음 그림의 어두운 부분(경계선 포함)이다.



원 $x^2+y^2=4$와 직선 $y=-\sqrt{3}x$ 의 두 교점을 각각 A, B라 하고,
원 $x^2+y^2=4$와 직선 $y=\sqrt{3}-2\sqrt{3}$의 교점을 C라 하자.
직선 $y=-\sqrt{3}x$ 의 기울기가 $-\sqrt{3}$이므로 x축의 양의 방향이 이루는 각($\angle AOC$)이 120°
따라서 부채꼴 AOC의 넓이는 $\pi\times2^2\times\frac{1}{3}=\frac{4}{3}\pi$

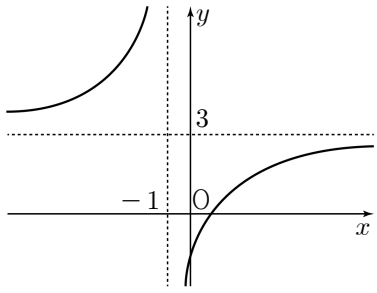
삼각형 OBC는 정삼각형이므로 넓이는 $\frac{\sqrt{3}}{4}\times 2^2 = \sqrt{3}$

$\therefore\ \frac{4}{3}\pi + \sqrt{3}$

9. 함수 $y=\frac{3x+k-10}{x+1}$의 그래프가 제4사분면을 지나도록 하는 모든 자연수 k의 개수는?

① 5
② 7
③ 9
④ 11

[정답] ③
[출제영역] 수학2 - 함수
[난이도] 중
[정답률] 46%
[해설]
$y=\frac{3x+k-10}{x+1}=3+\frac{k-13}{x+1}$ 이므로
점근선의 방정식은 x=-1, y=3 이다.



이 함수의 그래프가 제4사분면을 지나기 위해서는 그림과 같이 k-13 < 0 이고 (y절편)=k-10 < 0이어야 한다.
따라서 k < 10이고, 자연수 k의 개수는 9이다.

12. 실수 a에 대하여 9^a=8일 때, $\frac{3^a-3^{-a}}{3^a+3^{-a}}$의 값을 $\frac{q}{p}$라 할 때, p+q의 값은? (단, p와 q는 서로소인 자연수)

① 15
② 16
③ 17
④ 18

[정답] ②
[출제영역] 수학2 - 지수와 로그

[난이도] 하
[정답률] 67%
[해설]

$$\frac{3^a-3^{-a}}{3^a+3^{-a}}=\frac{3^{2a}-1}{3^{2a}+1}=\frac{9^a-1}{9^a+1}=\frac{8-1}{8+1}=\frac{7}{9}$$

∴ p+q=16

13. $\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{1\times3}+\frac{1}{2\times4}+\cdots+\frac{1}{n\times(n+2)}\right\}$의 값은?

① $\frac{3}{8}$

② $\frac{1}{2}$

③ $\frac{5}{8}$

④ $\frac{3}{4}$

[정답] ④
[출제영역] 미적분 - 수열의 극한
[난이도] 중
[정답률] 61%
[해설]

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{1\times3}+\frac{1}{2\times4}+\cdots+\frac{1}{n\times(n+2)}\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left\{\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)=\frac{3}{4}$$

15. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 f(x)에 대하여 곡선 y=f(x) 위의 점 (2, 4)에서의 접선이 점 (-1, 1) 에서 이 곡선과 만날 때, f'(3) 의 값은?

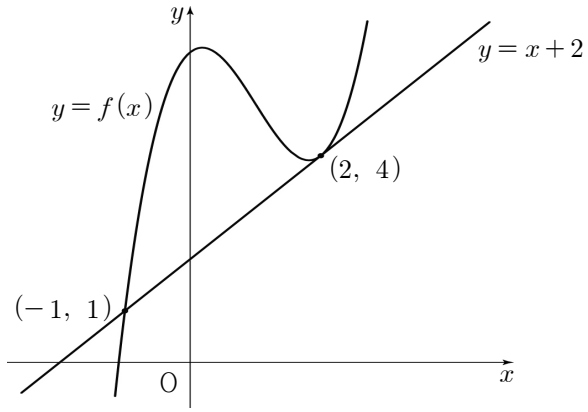
① 8
② 9
③ 10
④ 11

[정답] ③
[출제영역] 미적분 - 미분
[난이도] 상

[해설]

$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ 라 하면 $f'(x)=3x^2+2ax+b$

이고, 두 점 (2, 4), (-1, 1)을 지나는 직선의 방정식이 $y=x+2$ 이므로



$f(2)=4$에서 $4a+2b+c=-4$ …… ㉠

$f(-1)=1$에서 $a-b+c=2$ …… ㉡

$f'(2)=1$에서 $4a+b=-11$ ……㉢

㉠, ㉡, ㉢에 의하여 $a=-3$, $b=1$, $c=6$

$f'(x)=3x^2-6x+1$

따라서 $f'(3)=10$