

2026 인공 지능올리 Master Key 시리즈

정승현 고전역학 전자기학

정승현 편저

고전역학의 탄생은 뉴턴으로부터 시작되었습니다. 경험주의 철학의 부분적 지류로써의 과학을 하나의 학문으로 탄생시킨 계기를 마련해줍니다. 경험과 추상적 해석이 아닌 가설에 의한 예측 및 실험적 증명으로 기존 관측적 데이터의 타당성을 이끌어 내게 됩니다. 케플러와 그의 스승인 티코 브라헤가 수십 년간 행성을 관측하여 행성 법칙을 정립해 나갔는데, 뉴턴은 중력의 가설과 미적분의 고안으로 수식적으로 아름답게 증명해버립니다. 이는 이유를 알 수 없는 귀납적 추론이 아닌 가설에 의해 자연을 보다 더 심도있게 이해하는 시야를 선사해줍니다. 나아가 미적분의 탄생은 전혀 다른 양들의 연결고리로 실체를 구조화해 나가게 됩니다. 시간에 따른 위치변화를 속도로, 그리고 속도의 변화를 가속도라는 물리량으로 점차 확장시킵니다. 이로써 우리는 물체에 어떠한 힘이 작용할 때 초기 위치와 속도의 정보가 주어지면 임의의 시간에 위치와 속도 물리량을 모두 알 수 있다는 고전역학의 핵심에 도달하게 됩니다.

전자기학은 힘의 개념을 장(場)으로 확장하는 계기를 마련해줍니다. 고전역학에서 중력이 작용하는 공간을 중력장이라 하면, 전자기학은 전하에 의한 힘이 작용하는 공간을 전기장, 자기적 성질에 의한 힘이 작용하는 공간을 자기장으로 정의해나갑니다. 그리고 힘을 장의 개념으로 구조화해서 이해하게 됩니다. 나아가 다양한 실험법칙을 맥스웰이 수식적으로 통합시켜 결국 빛이 전자기파 현상임을 밝히게 됩니다. 이후 전자기 파동방정식에서 빛의 속력이 관측자에 무관하게 상수라는 사실을 확인하게 되는데, 이것이 고전역학의 완벽성의 종말과 동시에 특수 상대론의 탄생을 돕는 산파적 역할을 하게 됩니다.

과학은 세계관 속에서 완벽을 추구하고 점차 새로운 것의 발견으로 보완되거나 발전해나가는 여정 속에 있습니다.

그리고 어떠한 제한 조건 속에서 고전역학과 전자기학이 의미를 갖게 되므로 우리는 이를 배우고 익히게 됩니다. 특수 상대론의 탄생으로 고전역학이 엄밀하게 틀렸음을 알게 되었지만, 우리는 속력이 작은 세계에서는 고전역학의 효능성을 무시할 수 없습니다. 제가 이해하는 고전역학과 전자기학의 이면을 취지에 맞게 기술하였습니다. 이 책을 경험하는 분께 도움이 되길 바랍니다.

저자 정승현

1. 벡터 및 좌표계

(1) 두 벡터의 내적(inner product, scalar product, dot product)

두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 의 내적은 다음과 같이 정의된다.

$$\vec{a} = (a_1, a_2), \vec{b} = (b_1, b_2)$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos(\theta) = a_1 b_1 + a_2 b_2$$

벡터의 내적은 상대벡터로 연직선을 그렸을 때 두 벡터의 수평성분의 곱이다.

(2) 두 벡터의 외적(vector product, cross product)

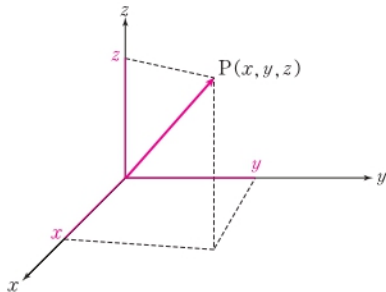
두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 의 외적은 다음과 같이 정의된다.

$$\vec{a} \times \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin(\theta) \vec{n}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = (a_y b_z - a_z b_y) \hat{x} + (a_z b_x - a_x b_z) \hat{y} + (a_x b_y - a_y b_x) \hat{z}$$

벡터의 외적은 두 벡터가 이루는 평행사변형의 넓이와 방향은 평행사변형과 수직한 방향이다. 회전 파트에서 주로 사용된다.

(3) 좌표계



① 직교 좌표계: x , y , z 축 각 수직을 이루는 3차원 일반적인 좌표계이다. 평행이동 대칭성이 있어서 일반적인 병진운동에서 많이 활용된다.

직교 좌표계는 회전 대칭성과는 별개로 평행이동 대칭성을 관계에 있으므로 단위벡터를 시간에 대해 미분한 값 즉, $\frac{d\hat{x}}{dt} = \frac{d\hat{y}}{dt} = \frac{d\hat{z}}{dt} = 0$

• 단위벡터: $\hat{x}$, $\hat{y}$, $\hat{z}$

• 위치, 속도, 가속도

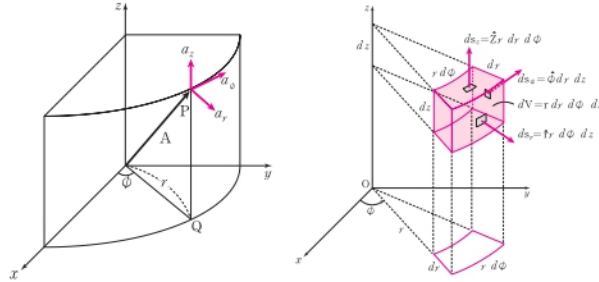
$$\vec{s} = \overrightarrow{OP} = (x, y, z) = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{s}}{dt} = (v_x, v_y, v_z) = \dot{x}\hat{x} + \dot{y}\hat{y} + \dot{z}\hat{z}$$

$$\vec{a} = \frac{d^2\vec{s}}{dt^2} = (a_x, a_y, a_z) = \ddot{x}\hat{x} + \ddot{y}\hat{y} + \ddot{z}\hat{z}$$

• 미소 부피: $dV = dx dy dz$

- ② 원통형 좌표계: ρ, ϕ, z 축 각 수직을 이루는 3차원 좌표계이다. x, y 평면 회전 대칭성 및 z 축 평행이동 대칭성이 있다.

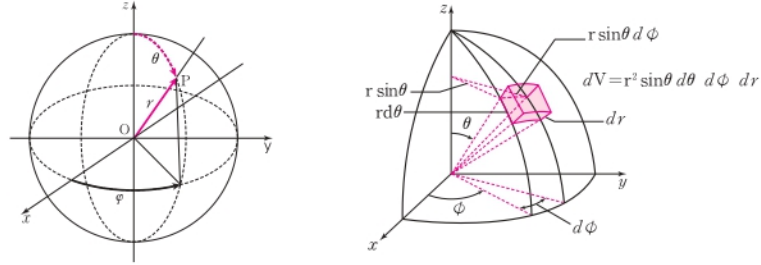


- 단위벡터 $\hat{\rho}, \hat{\phi}, \hat{z}$: 원통형 좌표계에서 단위벡터 $\hat{\rho}, \hat{\phi}$ 는 회전 대칭성을 가지므로 회전하게 되면 시간에 따라 단위벡터의 방향이 바뀌게 된다. 즉, 시간에 대한 상수가 아니다.
- 위치, 속도, 가속도

$$\begin{aligned}\vec{s} &= \overrightarrow{OP} = (x, y, z) = (\rho \cos \phi, \rho \sin \phi, z) = \vec{\rho} + \vec{z} = \rho \hat{\rho} + z \hat{z} \\ \frac{d\vec{s}}{dt} &= (\dot{\rho} \cos \phi - \rho \dot{\phi} \sin \phi, \dot{\rho} \sin \phi + \rho \dot{\phi} \cos \phi, \dot{z}) = \dot{\rho} \hat{\rho} + \rho \dot{\phi} (-\sin \phi, \cos \phi) + \dot{z} \hat{z} \\ \vec{v} &= \frac{d\vec{s}}{dt} = \frac{d}{dt} (\vec{\rho} + \vec{z}) = \frac{d}{dt} (\rho \hat{\rho} + z \hat{z}) = \dot{\rho} \hat{\rho} + \rho \dot{\hat{\rho}} + \dot{z} \hat{z} \\ \vec{v} &= \frac{d\vec{s}}{dt} = (v_\rho, v_\phi, v_z) = \dot{\rho} \hat{\rho} + \rho \dot{\hat{\rho}} + \dot{z} \hat{z} \\ \therefore \dot{\hat{\rho}} &= \dot{\hat{\phi}} \hat{\phi} \\ \hat{\phi} &= (-\sin \phi, \cos \phi) \\ \dot{\hat{\phi}} &= \dot{\phi} (-\cos \phi, -\sin \phi) = -\dot{\phi} \hat{\rho} \\ \vec{a} &= (a_\rho, a_\phi, a_z) = \frac{d}{dt} (\dot{\rho} \hat{\rho} + \rho \dot{\hat{\rho}} + \dot{z} \hat{z}) \\ &= \ddot{\rho} \hat{\rho} + \dot{\rho} \dot{\hat{\rho}} + \dot{\rho} \dot{\hat{\phi}} + \rho \ddot{\hat{\phi}} + \rho \dot{\hat{\phi}} \dot{\phi} + \ddot{z} \hat{z} \\ &= (\ddot{\rho} - \rho \dot{\phi}^2) \hat{\rho} + (\rho \ddot{\phi} + 2\dot{\rho} \dot{\phi}) \hat{\phi} + \ddot{z} \hat{z}\end{aligned}$$

- 미소 부피: $dV = d\rho(\rho d\phi)dz = \rho d\rho d\phi dz$

③ 구면 좌표계: r, θ, ϕ 축 각 수직을 이루는 3차원 좌표계이다. ϕ, θ 회전 대칭성이 있다.



- 단위벡터: r, θ, ϕ 구면 좌표계에서 $\hat{r}, \hat{\theta}, \hat{\phi}$ 는 회전 대칭성을 가지므로 회전하게 되면 시간에 따라 단위벡터의 방향이 바뀌게 된다. 즉, 시간에 대한 상수가 아니다.

- 위치, 속도

$$\begin{aligned}\vec{s} &\equiv \vec{OP} = (x, y, z) = (r \sin \theta \cos \phi, r \sin \theta \sin \phi, r \cos \theta) = r \hat{r} \\ \frac{d\vec{s}}{dt} &= (\dot{r} \sin \theta \cos \phi + r \dot{\theta} \cos \theta \cos \phi - r \dot{\phi} \sin \theta \sin \phi, \dot{r} \sin \theta \sin \phi + r \dot{\theta} \cos \theta \sin \phi + r \dot{\phi} \cos \theta, \dot{r} \cos \theta - r \dot{\theta} \sin \theta) \\ &= \dot{r} \hat{r} + r \sin \theta \dot{\phi} (-\sin \phi, \cos \phi, 0) + r \dot{\theta} (\cos \theta \cos \phi, \cos \theta \sin \phi, -\sin \theta) \\ \vec{v} &= \frac{d\vec{s}}{dt} = \dot{r} \hat{r} + r \dot{\theta} \hat{\theta} + r \sin \theta \dot{\phi} \hat{\phi} \\ \vec{v} &= \frac{d\vec{s}}{dt} = (v_r, v_\theta, v_\phi) = \dot{r} \hat{r} + r \dot{\theta} \hat{\theta} + r \sin \theta \dot{\phi} \hat{\phi} \\ \therefore \dot{\hat{r}} &= \dot{\theta} \hat{\theta} + \sin \theta \dot{\phi} \hat{\phi}\end{aligned}$$

- 미소 부피: $dV = dr(r \sin \theta d\phi) r d\theta = r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi$

2. 미적분 공식

(1) 3차원 미분 연산자 ∇

① gradient $\vec{\nabla} f$: 기하적 의미는 특정 좌표에서 기울기를 의미한다.

- 직교좌표계(x, y, z): $\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right)$
- 원통좌표계(ρ, ϕ, z): $\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial \rho}, \frac{1}{\rho} \frac{\partial f}{\partial \phi}, \frac{\partial f}{\partial z} \right)$
- 구면좌표계(r, θ, ϕ): $\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta}, \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \phi} \right)$

② Divergence $\vec{\nabla} \cdot \vec{F}$: 기하학적 의미는 특정 좌표계에서 각 좌표축 방향으로 이동 성분을 의미한다. 즉, 중심에 대해 퍼져나가는 성분을 말한다.

- 직교좌표계(x, y, z): $\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$
- 원통좌표계(ρ, ϕ, z): $\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho F_\rho) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial F_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$
- 구면좌표계(r, θ, ϕ): $\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 F_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta F_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial F_\phi}{\partial \phi}$

③ Curl $\vec{\nabla} \times \vec{F}$: 기하적 의미는 특정 좌표계에서 각 좌표축을 회전축으로 회전 성분을 의미한다. 즉, 중심에 대해 회전 성분을 말한다.

- 직교좌표계(x, y, z)

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}, \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}, \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right)$$

- 원통좌표계(ρ, ϕ, z)

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \frac{1}{\rho} \begin{vmatrix} \hat{\rho} & \rho \hat{\phi} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial \rho} & \frac{\partial}{\partial \phi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_\rho & \rho F_\phi & F_z \end{vmatrix} = \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial F_z}{\partial \phi} - \frac{\partial F_\phi}{\partial z} \right) \hat{\rho} + \left(\frac{\partial F_\rho}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial \rho} \right) \hat{\phi} + \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho F_\phi) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial F_\rho}{\partial \phi} \right) \hat{z}$$

- 구면좌표계(r, θ, ϕ)

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{F} &= \frac{1}{r^2 \sin \theta} \begin{vmatrix} \hat{r} & r \hat{\theta} & r \sin \theta \hat{\phi} \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \phi} \\ F_r & r F_\theta & (r \sin \theta) F_\phi \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{r \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta F_\phi) - \frac{\partial F_\theta}{\partial \phi} \right] \hat{r} + \frac{1}{r} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial F_r}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial r} (r F_\phi) \right] \hat{\theta} + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r F_\theta) - \frac{\partial F_r}{\partial \theta} \right] \hat{\phi} \end{aligned}$$

(2) 가우스 발산 법칙

$$\int \vec{\nabla} \cdot \vec{F} dV = \int \vec{F} \cdot d\vec{S}$$

가우스 발산 법칙은 벡터장 $\vec{F}$ 의 발산, 즉 뻗어나가는 성분을 알아내는데 사용된다.

(3) 스토크스 법칙

$$\int (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot d\vec{S} = \int \vec{F} \cdot d\vec{l}$$

스토크스 법칙은 벡터장 $\vec{F}$ 의 회전 성분을 알아내는데 사용된다.

3. 행렬

1차식 $x + by = m$, $cx + dy = n$ 일 때 행렬로 표현하면

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}$$

복잡한 1차 방정식의 해를 동시에 구하거나 해의 존재성을 판명할 때 사용된다.

※ 회전 변환

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

▲ 점의 회전 변환

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

▲ 좌표축의 회전 변환

4. 삼각함수 공식

(1) 피타고라스 정리

- $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$
- $1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$
- $1 + \cot^2\theta = \operatorname{cosec}^2\theta$

(2) 삼각함수 합차 공식

- $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta$
- $\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha \cos\beta - \cos\alpha \sin\beta$
- $\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta$
- $\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta$
- $\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha \tan\beta}$
- $\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha \tan\beta}$

(3) 삼각함수 두배각 공식

- $\sin 2\theta = 2\sin\theta \cos\theta$
- $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$
 $= 2\cos^2\theta - 1$
 $= 1 - 2\sin^2\theta$
- $\tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1 - \tan^2\theta}$

(4) 삼각함수 반각 공식

- $\cos^2\theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2}$
- $\sin^2\theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2}$

(5) 삼각함수 합성 공식

- $\sin A + \sin B = 2 \sin\left(\frac{A+B}{2}\right) \cos\left(\frac{A-B}{2}\right)$
- $\sin A - \sin B = 2 \cos\left(\frac{A+B}{2}\right) \sin\left(\frac{A-B}{2}\right)$
- $\cos A + \cos B = 2 \cos\left(\frac{A+B}{2}\right) \cos\left(\frac{A-B}{2}\right)$
- $\cos A - \cos B = -2 \sin\left(\frac{A+B}{2}\right) \sin\left(\frac{A-B}{2}\right)$

Part 01 고전역학

Chapter 01 심화 운동방정식

01. 외력 $F(x)$ 가 위치 x 에만 의존하는 경우 ... 14
02. 외력 $F(v)$ 가 속도 v 에만 의존하는 경우 ... 16
03. 외력 $F(x, v)$ 가 위치 x 와 속도 v 에 동시에
의존하는 경우 ... 17
04. 외력 $F(x, v, t)$ 가 위치 x 와 속도 v , 시간 t 에
모두 의존하는 경우 ... 18
05. 질량 $M(t)$ 이 시간에 따라 변하는 운동 ... 20
- 연습문제 ... 22

Chapter 02 회전좌표계 역학과 중력장 운동

01. Local region ... 35
02. Grand space ... 41
03. 중력장에서 일반적 접근 ... 46
- 연습문제 ... 54

Chapter 03 라그랑지안 역학 기본

01. 최소 작용 원리 ... 67
02. 라그랑지안 역학의 출발점 ... 69
- 연습문제 ... 76

Chapter 04 라그랑지안 역학 응용 - 구름 운동과 용수철 운동

01. 물체의 구름 운동에 대한 라그랑지안 ... 88
02. 물체의 용수철 운동에 대한 라그랑지안 ... 90
- 연습문제 ... 92

Chapter 05 라그랑지안 역학 - 정상 모드 진동

01. 단순조화진동 ... 101
02. 결합 진동 ... 101
- 연습문제 ... 105

Part 02 전자기학

Chapter 01 전자기학 기본과 쿨롱의 법칙

01. 가우스 발산 법칙 ... 114
02. 스토크스 법칙 ... 115
03. 맥스웰 방정식의 이해 ... 116
04. 전기장 구하기 ... 117
05. 전기적 퍼텐셜 V ... 122
06. 퍼텐셜 에너지 ... 131
07. 물질 내에서 전기장 ... 132
08. 불연속면에 의한 경계 조건 ... 136
09. 축전기의 전기용량 C ... 140
- 연습문제 ... 145

Chapter 02 이미지 전하법

- 01. 접지되어 있는 무한한 도체 평면 위 높이 h 에
전하 q 가 존재할 때 ... 160
- 02. 접지되어 있는 도체 껍질구에서 이미지 전하법
... 164
- 03. 접지되어 있지 않고 전하량 Q 에 대전되어 있는
도체 껍질구 중심에 d 만큼 떨어진 전하 ... 165
- 연습문제 ... 168

Chapter 03 전기장 경계조건 대칭성과 특수함수 활용

- 01. 구형 좌표계 퍼텐셜 ... 174
- 02. 원통형 좌표계 퍼텐셜 ... 183
- 연습문제 ... 184

Chapter 04 자기장과 로렌츠 힘

- 01. 맥스웰 방정식 설명 ... 187
- 02. 자기장 영역의 흐름 ... 188
- 03. 정적 상태 자기장 ... 188
- 04. 로렌츠 힘 ... 194
- 연습문제 ... 200

Chapter 05 시간변화 맥스웰 방정식

- 01. 시간 의존 상태 맥스웰 방정식 ... 211
- 02. 솔레노이드 자체유도 정의 ... 217
- 03. 변압기 원리 ... 218
- 04. 앙페르 법칙 ... 219
- 연습문제 ... 221

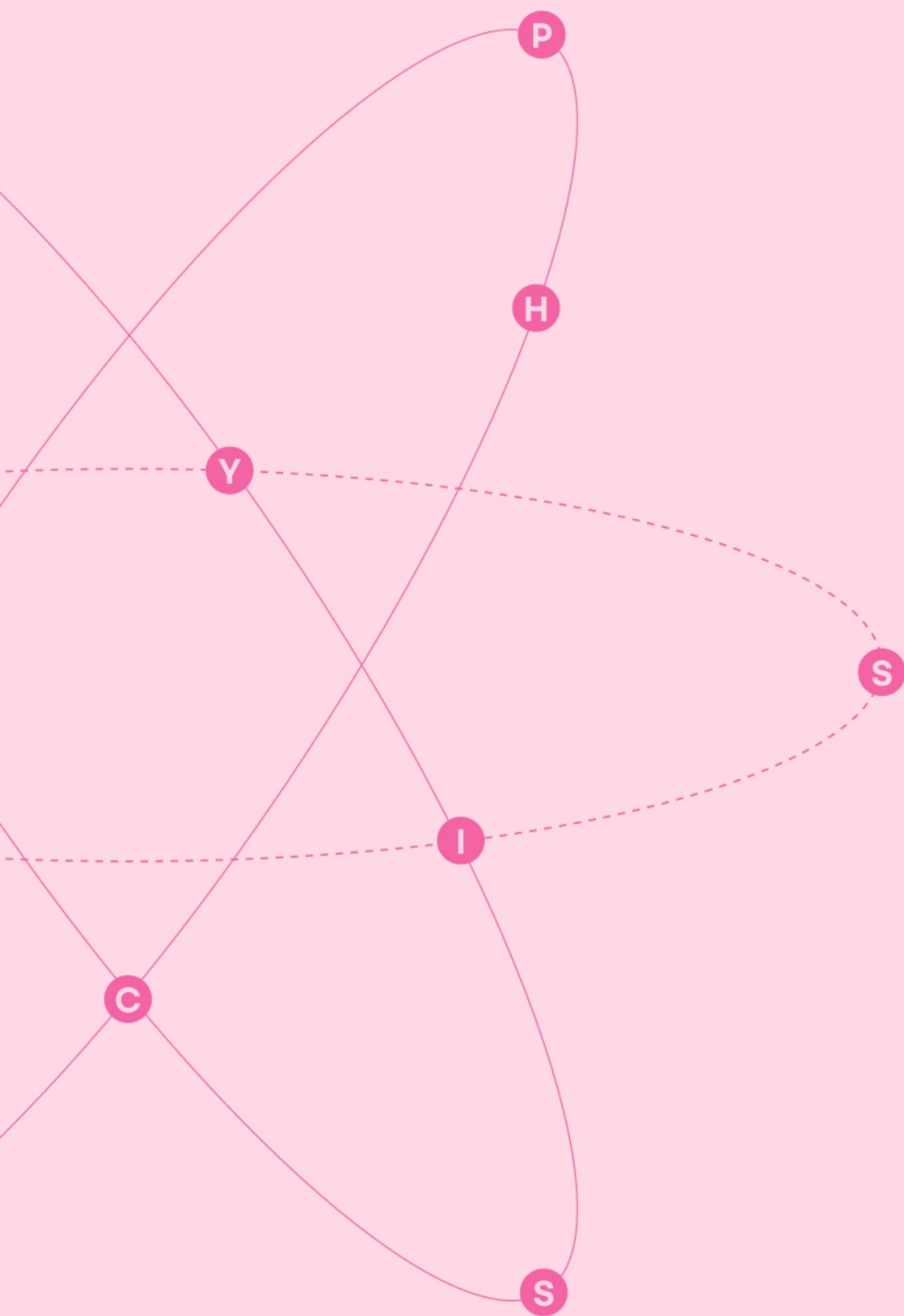
Chapter 06 매질에서의 자기장

- 01. 자기장의 원인 ... 231
- 02. 자기화 및 자기쌍극자 모멘트 ... 233
- 03. 속박전류밀도 ... 235
- 04. 인위적 전류밀도 생성 ... 236
- 05. 쌍극자 모멘트 $\vec{m}$ 이나 자화 $\vec{M}$ 이 존재하는
공간에서 자기장 $\vec{B}$ 와 벡터퍼텐셜 $\vec{A}$... 238
- 06. 물질 내에서의 자기장 ... 240
- 연습문제 ... 243

Chapter 07 전자기파와 에너지

- 01. 포인팅 정리 ... 250
- 02. 원천전하와 전류가 없는 공간에서
전자기학 파동방정식 ... 251
- 03. 빛의 세기와 포인팅 벡터와의 관계 ... 253
- 04. 광자의 탄성 충돌과 압력 ... 254
- 연습문제 ... 255

연습문제 정답 ... 266



정승현
고전역학
전자기학

Part

01

고전역학

Chapter 01 심화 운동방정식

Chapter 02 회전좌표계 역학과 중력장 운동

Chapter 03 라그랑지안 역학 기본

Chapter 04 라그랑지안 역학 응용 - 구름 운동과 용수철 운동

Chapter 05 라그랑지안 역학 - 정상 모드 진동

심화 운동방정식

일반물리에서는 가속도의 크기가 상수인 것을 다루었다면 심화역학에서는 가속도가 시간에 따라 변하는 것을 다룬다. 이는 운동방정식을 정의하여 미적분으로 해결한다.

$$\Sigma \vec{F} = m\vec{a} : \text{운동방정식}$$

$\vec{a}(t), \vec{v}(t), \vec{s}(t) : t$ 는 역학적 변수

01 외력 $F(x)$ 가 위치 x 에만 의존하는 경우

$$\text{운동방정식 } m \frac{d^2 x}{dt^2} = F(x)$$

물리적 예시는 보존력인 용수철 운동과 비보존력인 마찰력이 존재하는 공간으로 진입할 때가 있다.

1. 용수철 운동 $F(x) = -kx$

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx \rightarrow m \frac{d^2 x}{dt^2} + kx = 0$$

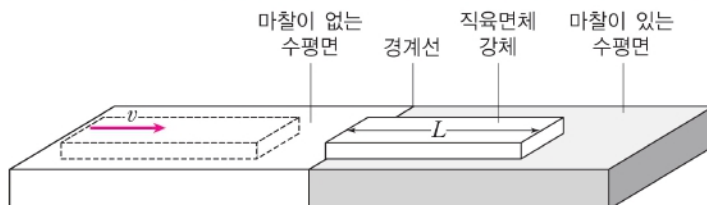
이 경우는 일반물리에서 배운 것처럼 단순 조화 운동으로 해는 $x(t) = A \sin(\omega t + \phi)$ 이고, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ 이다.

여기서 A 와 ϕ 는 초기조건(초기 위치, 초기 속도)에 의해 결정이 된다.

2. 마찰력 $F(x) = -kx$ 로 존재하는 경우

이 경우는 해의 형태는 동일하지만 비보존력이므로 진동하지 않고 역학적 에너지가 보존되지 않는 차이점이 있다.

예제 1 길이 L 의 균일한 막대는 부드럽고 마찰이 없는 수평면을 따라 일정한 속력 v 로 미끄러져 움직인다. 그런 다음 막대는 막대와 표면 사이의 운동 마찰 계수 μ_k 인 마찰면에 입사되어 막대의 길이 L 만큼 움직인 다음 정지하였다.



막대가 마찰면에 길이 x 만큼 들어갔을 때 마찰면에서 막대의 가속도 크기 $|a|$ 를 구하시오. 또한 막대의 초기 속력 v 를 구하시오. (단, 중력 가속도의 크기는 g 이다.)

정답 1) $|a| = \frac{\mu_k g}{L} x$, 2) $v = \sqrt{\mu_k g L}$

풀이

1) 막대의 질량을 M 이라 하면, 마찰면에 길이 x 만큼 들어갔을 때 마찰력으로 작용하는 수직항력 $N = Mg \frac{x}{L}$ 이다.

$$M \frac{d^2 x}{dt^2} = -\mu_k N = -\mu_k \frac{Mg}{L} x$$

가속도는 $a = -\frac{\mu_k g}{L} x$ 이므로 가속도의 크기 $|a| = \frac{\mu_k g}{L} x$

2) 운동방정식 $\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{\mu_k g}{L} x = 0$ 이므로 해는 $x(t) = A \sin(\omega t + \phi)$ 이다. 그리고 $v(t) = A\omega \cos(\omega t + \phi)$, $\omega = \sqrt{\frac{\mu_k g}{L}}$ 이다.

$t=0$ 일 때 초기 속력 v 이고, 최대 속력이므로 $v(t=0) = A\omega$ 이고, $\phi=0$ 이다. 그리고 정지할 때는 $v(t=t_0) = 0$ 이므로

$\omega t_0 = \frac{\pi}{2}$ 이다. $x(t_0) = A \sin(\omega t_0) = A = L$ 이므로, $v = A\omega = L \sqrt{\frac{\mu_k g}{L}} = \sqrt{\mu_k g L}$ 이다.

※ 다른 풀이

① chain rule

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -\frac{\mu_k g}{L} x \rightarrow \frac{dv}{dt} = -\frac{\mu_k g}{L} x$$

$$\frac{dv}{dt} \frac{dx}{dx} = v \frac{dv}{dx} = -\frac{\mu_k g}{L} x$$

$$\rightarrow v dv = -\frac{\mu_k g}{L} x dx$$

$$\int_v^0 v dv = -\frac{\mu_k g}{L} \int_0^L x dx$$

$$\therefore v = \sqrt{\mu_k g L}$$

② 일과 에너지 정리

초기 운동에너지가 모두 마찰력에 의한 소비 에너지로 전환된다.

$$\frac{1}{2} M v^2 = \int_0^L |F(x)| dx = \int_0^L \frac{\mu_k Mg}{L} x dx = \frac{1}{2} \mu_k Mg L$$

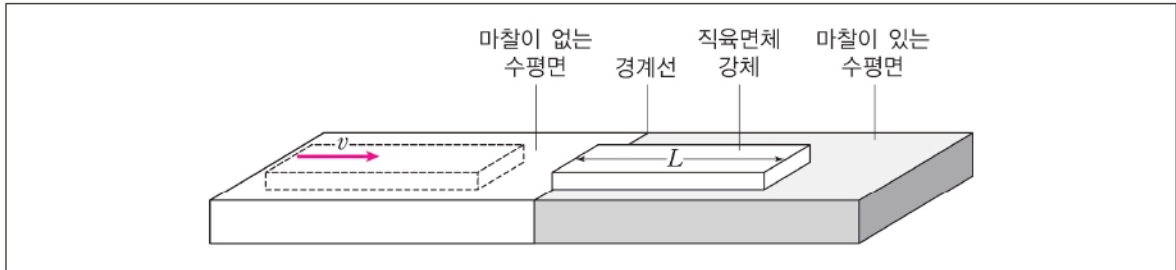
$$\therefore v = \sqrt{\mu_k g L}$$

연습문제

정답_ 266p

12-15

- 01** 다음 그림은 길이가 L 이고 밀도가 균일한 직육면체 강체가 마찰이 없는 수평면에서 일정한 속력 v 로 오른쪽으로 미끄러지다가, 마찰이 있는 수평면에서 정지한 것을 나타낸 것이다. 마찰이 있는 수평면과 강체 사이의 운동마찰계수는 μ_k 이다. 강체의 왼쪽 모서리는 두 수평면의 경계선과 일치하였다.



μ_k 는? (단, 중력 가속도는 g 이고, 공기 저항은 무시하며, 두 수평면의 높이는 같고, 강체는 직선운동을 한다.)

16-A02

- 02** 다음 그림과 같이 수평면에 놓인 질량 m 인 물체가 시간 $t=0$ 일 때 속도 v_0 으로 직선 운동을 시작하여 $t=t_{\text{정지}}$ 에 정지하였다. 물체는 운동하는 동안 속도 v 에 비례하는 크기가 kv 인 공기에 의한 저항력을 수평면으로부터 크기가 f 인 운동 마찰력을 받는다.



이때 이 물체의 운동방정식을 쓰고 $t_{\text{정지}}$ 를 구하시오. (단, k 와 f 는 상수이다.)

Part 01 | 고전역학 연습문제 정답

Chapter 01 심화 운동방정식

• 본문_22~34p

01 $\frac{v^2}{gL}$

02 1) $ma + kv + f = 0$, 2) $t_{\frac{v}{2}} = \frac{m}{k} \ln \left(1 + \frac{kv_0}{f} \right)$

03 1) $z_0 = \frac{\rho_0}{\rho_l} h$, 2) $b < 2\sqrt{\frac{\rho_l g}{\rho_0 h}}$, $\omega = \sqrt{\frac{\rho_l g}{\rho_0 h} - \frac{b^2}{4}}$, 3) $\frac{z(t)}{z_0} = 1 + e^{-\frac{b}{2}t} \left(\cos \omega t + \frac{b}{2\omega} \sin \omega t \right)$

04 1) $m \frac{d^2 x}{dt^2} + bv + kx = F_0 \cos(\omega t)$, 2) $\tan \phi = \frac{b\omega}{k - m\omega^2}$, 3) $A = \frac{F_0}{b\omega}$

05 1) $a = \frac{um}{(m+M)T - mt} - g$, 2) $v = u \ln \frac{M+m}{M} - gT$

06 1) $M(t) = -2m \frac{t}{T} + 3m$, 2) $a(t) = \frac{6g}{-\frac{t}{T} + 3} - g$, 3) $v = (3 \ln 3 - 1)gT$

07 1) $M' = M + m \left(1 - \frac{t}{T} \right)$, $M'a = P - M'g$, 2) $v = \frac{PT}{m} \ln \left(\frac{M+m}{M} \right) - gT$

08 $v = u \ln \frac{m_0}{m}$, $m = \frac{m_0}{e}$

09 1) $v = v_0 e^{-\frac{k}{m}t}$ or $t = \frac{m}{k} \ln \frac{v_0}{v}$, 2) $s = \frac{m}{k} (v_0 - v)$

10 1) $s = \frac{1}{2k} \ln \left(\frac{\frac{g}{k}}{\frac{g}{k} - V^2} \right)$, 2) $t = \frac{1}{2\sqrt{gk}} \ln \left(\frac{\sqrt{\frac{g}{k}} + V}{\sqrt{\frac{g}{k}} - V} \right)$

11 1) $s = \frac{1}{2k} \ln \left(\frac{v_0^2 + \frac{g}{k}}{\frac{g}{k}} \right)$, 2) $v' = \frac{v_0 \sqrt{\frac{g}{k}}}{\sqrt{v_0^2 + \frac{g}{k}}}$

12) 1) $a(t) = g - \frac{3k}{4\rho} \frac{v^2}{r}$, 2) $\frac{dr}{dt} = \frac{k}{4\rho} v$, 3) $a_t = \frac{1}{7}g$

13) 1) $a = g - \frac{3k}{4\pi r^2 \rho_1} v - \frac{\rho_2}{\rho_1} g$, $a(t) = g \left(1 - \frac{\rho_2}{\rho_1} \right) e^{-\frac{3k}{4\pi r^2 \rho_1} t}$, 2) $v_f = \frac{4\pi r^2 g}{3k} (\rho_1 - \rho_2)$

Chapter 02 회전좌표계 역학과 중력장 운동

• 본문_ 54~66p

01) 1) $a_c = \omega^2 v_0 t$, 2) $F_{\text{외부}} = m\omega v_0 \sqrt{4 + (\omega t)^2}$

02) 1) $r(t) = \frac{v_0}{\Omega} \sinh \Omega t$, 2) $N = 2m \Omega v_0 \cosh \Omega t$

03) 1) $\left| \frac{d\vec{L}}{dt} \right| = mR^2 \omega \dot{\phi} \sin \theta = mgD \sin \theta$, 방향은 $\hat{\phi}$, 2) $\omega_p = \frac{gD}{R^2 \omega}$, 방향은 $\hat{z}$

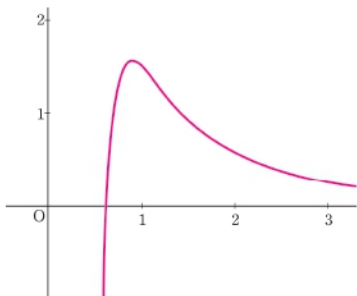
04) $\Omega = \frac{mgd}{Lv} = \frac{2gd}{R^2 \omega}$

05) 1) $|\vec{\tau}| = \frac{\sqrt{2}}{2} MgD$, $+\hat{\phi}$, 2) $\Omega = \frac{MgD}{4I_0 \omega}$, $+z$ 방향

06) 1) $\vec{F} = -m\omega^2 \vec{r}(t)$, 2) $\vec{\tau} = 0$, 3) $\phi = \frac{\pi}{2}$

07) 1) $r_s = \frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 3\beta\gamma}}{\beta}$, 2) $r_0 = \frac{2\alpha}{\beta} > r_s$

08) $U_{\text{eff}} = -\frac{k}{r^4} + \frac{L^2}{2mr^2}$, $r_0 = \frac{2}{L} \sqrt{km}$: 불안정한 평형점이다, $T = \frac{8\pi km^2}{L^3}$



정승현

고전역학 전자기학



2024 고객선택브랜드지수 1위
교육서비스 부문



2023 고객선택브랜드지수 1위
교육서비스 부문



2022 한국 브랜드 만족지수 1위
교육(교육서비스)부문 1위



2021 대한민국 소비자 선호도 1위
교육부문 1위 선정



2020 한국 산업의 1등
브랜드 대상 수상



2019 한국 우수브랜드평가대상
교육브랜드 부문 수상



2018 대한민국 교육산업 대상
교육서비스 부문 수상



브랜드스타 BSTI
브랜드 가치평가 1위

정가 22,000원



9 791172 623951

ISBN 979-11-7262-395-1

ISBN 979-11-7262-393-7(SET)



www.pmg.co.kr

교재관련 문의 02 - 6466- 7202

학원관련 문의 02-816- 2030

온라인강의 문의 02 - 6466 - 7201