제1판

중등임용 전공수학 대비

# 윤양동 임용수학

## Ⅳ

윤양동 편저

해석학

복소해석

Mathematics

박문각 임용 동영상강의 www.pmg.co.kr

박문각

# 차 례

Contents

**윤양동**

# 임용수학

Mathematics

PART

# 1

# 해석학

Chapter 01

# 실수의 체계

## 01 실수와 실수집합의 체계

유리수로부터 실수를 구성하는 방법
1. (데데킨트) 절단
2. (칸토어) 코시열의 동치류

### 1. 실수의 공리(Axioms)

#### (1) 대수적 공리(Algebraic Axioms)

실수의 집합에서 정의된 두 연산 $+$, $\times$에 대하여

① $a+b=b+a$ , $ab=ba$

② $a+(b+c)=(a+b)+c$ , $a(bc)=(ab)c$

③ $a(b+c)=ab+ac$

④ 임의의 실수 $a$에 대하여 $a+x=a$을 만족하는 실수 $x$가 존재하여 0으로 쓰고, 각 실수 $a$에 대하여 $a+y=0$인 실수 $y$가 존재하여 $-a$로 쓴다.

⑤ 임의의 실수 $a$에 대하여 $ax=a$을 만족하는 실수 $x$가 존재하여 1로 쓰고 0아닌 각 실수 $a$에 대하여 $ay=1$인 실수 $y$가 존재하여 $\frac{1}{a}$로 쓴다.

#### (2) 순서 공리(Order Axioms)

실수의 집합에서 정의된 관계 $<$에 대하여

⑥ $a=b$ , $a<b$ , $a>b$ 중 단 하나가 참이다.

⑦ $a<b$이면, 임의의 실수 $c$에 대하여 $a+c<b+c$

⑧ $a>0$, $b>0$이면 $ab>0$

⑨ $a>b$, $b>c$이면 $a>c$

#### (3) 완비 공리(연속성 공리)

공집합이 아닌 실수의 부분집합 $S$가 위로 유계(bounded above)이면, $S$의 상한(supremum, l.u.b 최소상계)이 존재한다.

## 2. 유계성(boundedness)

**[정의] {집합의 유계}**
실수의 부분집합 $S$ 가 "위로 유계"라는 것은『어떤 실수 $u$ 가 존재하여 모든 $x \in S$ 에 대하여 $x \le u$』가 성립할 때를 말한다. 이런 $u$ 를 집합 $S$ 의 상계(upper bound)라 한다.
$S$ 가 "아래로 유계"라는 것은 " 모든 $x \in S$ 에 대하여 $x \ge l$ "인 실수 $l$ 이 존재할 때를 말하며, 이런 $l$ 을 집합 $S$ 의 하계(lower bound)라 한다.
$S$ 가 위로 유계이고 아래로 유계일 때, $S$ 를 유계 집합(bounded set)이라 한다.

특히, 함수 $f : A \to \mathbb{R}$ 가 유계(bounded)라 함은 함수 $f$ 의 치역 $f(A)$ 가 실수 $\mathbb{R}$ 의 부분집합으로서 유계집합일 때를 말한다. 부등식으로 나타내면 다음과 같다.

**[정의] {함수의 유계}**
모든 $a \in A$ 에 관하여 $l \le f(a) \le u$ 인 적당한 실수 $l, u$ 가 존재할 때, 함수 $f$ 를 유계라 한다.

$n$ 차원 실수공간 $\mathbb{R}^n$ 의 부분집합 $A$ 가 유계(bounded)라 함은, 모든 $p \in A$ 에 대하여 노름 $\|p\|$ 가 유계일 때를 말한다.

유계성과 관련된 몇 가지 정리를 살펴보자.

**[Bolzano-Weierstrass 정리]**
(1) $\mathbb{R}$ 의 유계인 수열은 $\mathbb{R}$ 에서 수렴하는 부분수열을 갖는다.
(2) $\mathbb{R}$ 의 유계 무한집합은 집적점을 갖는다.

집적점의 뜻은 곧이어 소개하며 위상수학의 집적점 정의와 같다.

**[Heine-Borel 정리]**
실공간 $\mathbb{R}^n$ 의 부분집합 $K$ 가 컴팩트 집합일 필요충분조건은 유계 폐집합인 것이다.

컴팩트(compact)의 뜻은 개집합을 개구간으로 바꾸어 놓은 후 위상수학의 정의와 같다.

**[축소구간 정리(nested interval theorem)]**
유계폐구간열 $I_n = [a_n, b_n]$ 에 대하여 $I_{n+1} \subset I_n$, $\lim_{n \to \infty} |b_n - a_n| = 0$ 이면 $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$ 는 한 점이다.

위의 두 정리는 위상수학의 컴팩트(compact)개념과 관련이 있다.
정리에 쓰이는 몇몇 개념들은 다음 절에서 소개합니다.

### 3. 상한(supremum, 최소상계 l.u.b), 하한(infimum, 최대하계 g.l.b)

**[정의] {상한}** 실수의 부분집합 $A$ 에 대하여 다음의 성질을 만족하는 실수 s를 $A$ 의 상한(supremum) 또는 최소상계(least upper bound)라 하고 $\sup(\mathrm{A}) = \mathrm{lub}(\mathrm{A}) = \mathrm{s}$로 쓴다.
(1) 모든 $a \in A$ 에 대하여 $a \le s$
(2) 임의의 양의 실수 $\varepsilon > 0$ 에 대하여 $s - \varepsilon < a$ 인 $a \in A$ 가 존재한다.

$A$ 의 상한을 $s$ 라 하면 $s$ 는 $A$ 의 상계들 중 최솟값이다.

**[정의] {하한}** 마찬가지로 다음의 성질을 만족하는 실수 $i$ 를 하한(infimum) 또는 최대하계(greatest lower bound)라 하고$\inf(\mathrm{A}) = \mathrm{glb}(\mathrm{A}) = \mathrm{i}$로 쓴다.
(1) 모든 $a \in A$ 에 대하여 $a \ge i$
(2) 임의의 양의 실수 $\varepsilon > 0$ 에 대하여 $i + \varepsilon > a$ 인 $a \in A$ 가 존재한다.

$A$ 의 하한을 $i$ 라 하면 $i$ 는 $A$ 의 하계들 중 최댓값이다.
함수 $f: A \to \mathbb{R}$ 에 대하여 $f$ 의 상한 $\sup(f)$와 하한 $\inf(f)$는 치역$f(A)$ 의 상한과 하한으로 정의한다.

**[정의] {함수의 상한/하한}**

$$\sup(f) \equiv \sup(f(A)) \,,\ \inf(f) \equiv \inf(f(A))$$

실수의 부분집합인 정수집합의 특징을 보여 주는 다음 정리를 유계 개념을 이용하여 증명하자.

**(아르키메데스 정리)** 실수 $a$에 대하여 $a < n$인 정수 $n$이 존재함을 보여라.

**증명** (귀류법) 실수 $a$가 존재하여 정수집합 $\mathbb{Z}$ 의 상계(upper bound)라 하자.
즉, 정수집합 $\mathbb{Z}$ 가 위로 유계이면, 실수의 연속성공리에 의하여 최소상계 $x$가 존재한다.
$x$가 $\mathbb{Z}$ 의 최소상계라면 정의에 의하여 $x$는 다음을 만족한다.
(1) 모든 정수 $n$에 대하여 $n \le x$
(2) 임의의 양의 실수 c에 대하여 $x - c < n$이 성립하는 정수 $n$이 존재한다.
특히 $c = 1$일때, (2)에 의하여 $x - 1 < n$이 성립하는 정수 $n$을 택하자.
이때, 양변에 1을 더하면 $x < n + 1$이고, $n + 1$이 정수이므로 (1)에 의하여 $n + 1 \le x$. 따라서 $x < x$ 모순!
그러므로 실수 $a$에 대하여 $a < n$인 정수 $n$이 존재한다.

**참고** 아르키메데스의 공리는 유클리드 기하학에서는 공리(Axiom)이나 실수의 체계에서는 연속성 공리로부터 증명되는 정리(Theorem)이다. 아르키메데스의 공리는 측정 단위(unit)를 줄이면서 반복해서 적용하면 모든 실수는 십진기수법으로 측정할 수 있음을 보여주는 정리이다. 즉, 실수의 측정수 측면을 보여주는 정리라 할 수 있다.

**4. 폐포(closure)와 조밀성(dense)**

실수 $x$ 가 A의 밀착점(adherent point)이라 함은
임의의 $\epsilon > 0$ 에 대하여 $A \cap (x-\epsilon, x+\epsilon) \neq \varnothing$ 이 성립할 때를 말한다.
실수의 부분집합 A에 대하여 실수 $x$ 가 A의 밀착점일 필요충분조건은 $x$ 가 집합 $A$ 에 포함되는 어떤 수열 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset A$ 의 극한이 되는 것이다.

A의 밀착점들의 집합을 A의 폐포(closure)라 하고 $\overline{\mathrm{A}}$ 로 표기한다.

**[정의] {집적점}** 실수 $x$ 가 다음 조건을 만족할 때 A의 집적점(cluster point, limit point)이라 한다.

임의의 $\epsilon > 0$ 에 대하여 $(A - \{x\}) \cap (x-\epsilon, x+\epsilon) \neq \varnothing$

집합 A의 집적점들의 집합을 A′라 표기하며, $\overline{\mathrm{A}} = \mathrm{A} \cup \mathrm{A}'$ 이다.
집적점을 극한점이라 부르기도 한다.

**[정의]** 실수의 부분집합 A가 유계이면 A의 폐포 $\overline{\mathrm{A}}$ 는 최댓값(maximum)과 최솟값을 갖고 $\sup(\mathrm{A}) = \max(\overline{\mathrm{A}})$, $\inf(\mathrm{A}) = \min(\overline{\mathrm{A}})$ 가 성립한다.

개구간들의 합집합을 개집합이라 하고, $\mathrm{A} = \overline{\mathrm{A}}$ 인 집합 A 를 폐집합이라 한다.

"실수의 부분집합 A가 실수전체에 조밀하다"는 말의 의미는 두 가지가 있다.
하나는 순서집합에 관한 집합론에서 주로 쓰이는 의미로서
"임의의 서로 다른 두 실수사이에 항상 집합 A의 원소가 존재한다"
는 것이다. 다른 하나는 위상수학에서 나온 개념으로
"집합 A의 폐포가 실수 전체"
일 때를 말한다. 그리고 폐포가 실수 전체에 조밀함은

「모든 개구간 $(a, b)$ (단, $a < b$)에 대하여 $(a, b) \cap A \neq \varnothing$ 」

와 동치이다.

이 두 가지 의미의 조밀성은 실수의 부분집합에 대해서는 동치(equivalent)이다. 즉, 임의의 실수 $x$ 에 대하여 $x$ 와 $x + \frac{1}{n}$ 사이에 A의 원소를 찾을 수 있으므로 $x$ 로 수렴하는 A의 수열을 얻을 수 있으며, 역으로 임의의 서로 다른 두 실수 $x$, $y$에 대하여 $x$, $y$의 중점으로 수렴하는 A의 수열이 존재한다면 $x$, $y$ 사이에 존재하는 수열의 원소가 존재한다. 따라서 두 가지 조밀성의 정의는 동치 명제이다.

2024 고객선호브랜드지수 1위
교육서비스 부문

2023 고객선호브랜드지수 1위
교육서비스 부문

2022 한국 브랜드 만족지수 1위
교육(교육서비스)부문 1위

2021 대한민국 소비자 선호도 1위
교육부문 1위 선정

2020 한국 산업의 1등
브랜드 대상 수상

2019 한국 우수브랜드평가대상
교육브랜드 부문 수상

2018 대한민국 교육산업 대상
교육서비스 부문 수상

브랜드스탁 BSTI
브랜드 가치평가 1위

박문각 www.pmg.co.kr

교재관련 문의 02 - 6466- 7202
학원관련 문의 02-816-2030
온라인강의 문의 02 - 6466 - 7201

# 윤양동
# 임용수학

IV

해석학 복소해석

Mathematics

9 791172 624934 14410
ISBN 979-11-7262-493-4
ISBN 979-11-7262-489-7(SET)
정가 17,000원