



제1판

중등임용 전공수학 대비

윤양동 임용수학

III

윤양동 편저

위상수학
미분기하

Mathematics



차례

Contents

PART 1 위상수학

Chapter 1. 위상공간

- 1. 위상공간과 기저 6
- 2. 위상공간의 사례 11
- 3. 거리 위상공간 12

Chapter 2. 위상공간의 기본 개념

- 1. 내부, 외부, 경계 16
- 2. 폐포, 도집합, 수렴성 19

Chapter 3. 연속사상

- 1. 연속사상 27
- 2. 연속사상의 성질 36
- 3. 개사상, 폐사상 42
- 4. 위상동형사상과 위상적 불변성 44

Chapter 4. 부분공간, 적공간과 상공간

- 1. 부분위상공간과 상대위상 53
- 2. 적공간과 적위상 60
- 3. 사상의 유도위상 69
- 4. 상공간과 상사상 72

Chapter 5. 연결성과 컴팩트

- 1. 연결성 87
- 2. 컴팩트 99

Chapter 6. 분리공리와 가산공리

- 1. 가산공리 115
- 2. 분리공리 123

Chapter 7. 완비거리공간과 거리화

- | | |
|-----------------|-----|
| 1. 거리동형과 완비거리공간 | 147 |
| 2. 거리화에 관한 정리 | 150 |

PART 2 미분기하학

Chapter 1. 곡선의 기하학

- | | |
|----------------------|-----|
| 1. 평면과 공간의 이해 | 156 |
| 2. 곡선의 표현과 프레네 틀 | 159 |
| 3. 프레네-세레 정리와 곡률과 열률 | 163 |

Chapter 2. 곡면의 기하학

- | | |
|----------------------|-----|
| 1. 곡면의 표현 | 182 |
| 2. 법곡률과 측지곡률 | 194 |
| 3. 주요곡률과 가우스곡률, 평균곡률 | 206 |
| 4. 여러 가지 곡면과 곡률 | 213 |
| 5. 다르보 정리 | 223 |
| 6. 곡면에 관한 정리 | 226 |
| 7. 등장사상과 가우스 정리 | 231 |
| 8. 가우스-보네 정리 | 243 |

Chapter 3. 선적분과 면적분

- | | |
|--------|-----|
| 1. 선적분 | 249 |
| 2. 면적분 | 251 |

PART

1

위상수학

Chapter 1. 위상공간

Chapter 2. 위상공간의 기본 개념

Chapter 3. 연속사상

Chapter 4. 부분공간, 적공간과 상공간

Chapter 5. 연결성과 콤팩트

Chapter 6. 분리공리와 가산공리

Chapter 7. 완비거리공간과 거리화

위상공간(Topological Space)

01 위상공간(Topological space)과 기저(Base)

1. 위상공간(Topological space)

[정의] {위상공간} 공집합이 아닌 집합 X 의 부분집합족 \mathcal{J} 가 다음 공리계를 만족할 때, \mathcal{J} 를 X 위의 위상(topology)이라 하고, 집합 X 와 위상 \mathcal{J} 의 쌍 (X, \mathcal{J}) 를 위상공간(topological space)이라 한다.

- (1) $X, \emptyset \in \mathcal{J}$
- (2) $\{G_i \mid i \in I\} \subset \mathcal{J}$ 에 대하여 합집합 $\bigcup_{i \in I} G_i \in \mathcal{J}$
- (3) $G_1, G_2, \dots, G_k \in \mathcal{J}$ 에 대하여 교집합 $G_1 \cap G_2 \cap \dots \cap G_k \in \mathcal{J}$

위상이 분명한 경우 줄여서 위상공간 X 또는 간단히 공간 X 라 한다.
 위상공간 (X, \mathcal{J}) 에서 위상 \mathcal{J} 에 속하는 X 의 부분집합을 개집합(열린 집합, open set)이라 하며,

개집합의 여집합을 폐집합(닫힌 집합, closed set)이라 한다.

간단한 위상공간의 예를 들면 집합 $X = \{0, 1\}$ 에 집합족 $\mathcal{J} = \{X, \emptyset, \{0\}\}$ 는 X 위의 위상을 이루며 집합 $X, \emptyset, \{0\}$ 은 개집합(open set)이고 여집합 $\emptyset, X, \{1\}$ 은 폐집합(closed set)이다.

집합 $X = \{a, b, c, d, e\}$ 에 집합족

$\mathcal{J} = \{X, \emptyset, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d, e\}\}$

는 X 위의 위상을 이루며, 이 위상공간에서 $X, \emptyset, \{a\}, \{b, c, d, e\}$ 등은 개집합이며, 동시에 폐집합이다. $\{a, b\}$ 는 개집합도 폐집합도 아니다.

드 모르강(De Morgan) 법칙을 적용하면 다음 정리를 얻는다.

- [정리]** (1) X, \emptyset 은 폐집합이다.
 (2) 폐집합의 무제한 교집합은 폐집합이다.
 (3) 폐집합의 유한번 합집합은 폐집합이다.

한 집합위의 위상들끼리도 다음과 같이 서로 비교할 수 있다.

[정의] {강한 위상, 약한 위상} 집합 X 의 두 위상 $\mathcal{J}_1, \mathcal{J}_2$ 가 $\mathcal{J}_1 \subset \mathcal{J}_2$ 일 때, \mathcal{J}_1 은 \mathcal{J}_2 보다 약한 위상(거친 위상, weaker topology)이라 하고, \mathcal{J}_2 는 \mathcal{J}_1 보다 강한 위상(섬세한 위상, stronger topology)라 한다.

개집합/폐집합은 배타적 개념이 아님

여러 위상들이 주어질 때, 다음 정리와 같이 그 위상들 보다 약한 위상을 구성할 수 있다.

[정리] X 의 위상 $\mathcal{J}_k (k \in I)$ 들에 대하여 $\bigcap_{k \in I} \mathcal{J}_k$ 는 X 의 위상이다.

모든 \mathcal{J}_k 들의 교집합기호 $\bigcap_{k \in I} \mathcal{J}_k$ 를 $\bigcap \{ \mathcal{J}_k \mid k \in I \}$ 로 쓰기도 한다.

또한 합집합기호 $\bigcup_{k \in I} \mathcal{J}_k$ 를 $\bigcup \{ \mathcal{J}_k \mid k \in I \}$ 로 쓰기도 한다.

집합 $X = \{a, b, c\}$ 의 부분집합족 $S = \{X, \emptyset, \{a, b\}, \{b, c\}\}$ 에 대하여 $\bigcap \{ \{a, b\}, \{b, c\} \} = \{a, b\} \cap \{b, c\} = \{b\} \notin S$ 이므로 S 는 X 의 위상이 될 수 없다.

X 의 부분집합족 $B = \{X, \{a\}, \{b\}, \emptyset\}$ 에 대하여 $\bigcup \{ \{a\}, \{b\} \} = \{a\} \cup \{b\} = \{a, b\} \notin B$

이므로 B 는 X 의 위상이 될 수 없다.

X 의 부분집합족 $T = \{\emptyset, X, \{a, b\}, \{b, c\}, \{b\}\}$ 는 위상의 공리를 모두 만족하므로 X 의 위상이다.

두 위상의 합집합은 위상이 아닌 경우도 있으며 두 위상을 모두 포함하는 위상을 구성하려면 단순 합집합외에 더 많은 개집합을 추가해야 할 필요가 있다. 집합 $X = \{a, b, c\}$ 의 두 위상

$$T_1 = \{\emptyset, X, \{a, b\}, \{c\}\}, T_2 = \{\emptyset, X, \{a, b\}, \{a\}\}$$

에 대하여 $T_1 \cap T_2 = \{\emptyset, X, \{a, b\}\}$ 는 X 의 위상이다.

위상 $T_1 \cap T_2$ 는 T_1 보다 약한 위상이며 T_2 보다 약한 위상이다.

그러나 $T_1 \cup T_2 = \{\emptyset, X, \{a, b\}, \{c\}, \{a\}\}$ 는 X 의 위상이 아니다.

X 의 부분집합 $T_1 \cup T_2$ 에 몇 가지 집합을 추가하여 위상이 될 수 있도록 구성할 수 있다. 위의 경우에는 집합 $\{a, c\}$ 을 첨가하면 된다.

$$T_3 = \{\emptyset, X, \{a, b\}, \{c\}, \{a\}, \{a, c\}\}$$

T_3 는 X 의 위상이며 T_3 는 T_1 보다 강한 위상이며 T_2 보다 강한 위상이다.

\cap, \cup 기호에 대한 새로운 약속이다.

2. 부분기저(subbase)와 생성

공집합이 아닌 집합 X 의 적당한 부분집합들의 족 $S = \{A_i \subset X \mid i \in I\}$ 가 있을 때,

J 는 첨자집합 I 의 부분 집합이 아니다.

$$S \rightarrow B = \{A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_n} \mid i_1, \dots, i_n \in I\} \rightarrow T = \left\{ \bigcup_{G \in J} G \mid J \subset B \right\}$$

유한 교집합

무제한 합집합

이와 같은 절차를 거쳐 구성된 T 는 위상의 공리를 만족한다. 이때 T 는 S 를 포함하는 X 의 위상들 중에서 최소 위상이 된다. 이 위상 T 를 ‘ S 가 생성한 위상’이라 한다.

[정의] {부분기저} 위상공간 (X, \mathcal{J}) 의 개집합족 S 에 대하여 S 로 생성한 위상이 \mathcal{J} 일 때, S 를 위상 \mathcal{J} 의 부분기저(subbase)라 한다.

위상수학 교재 중에는 “ $\bigcup S = X$ ” 조건을 추가로 요구하는 교재도 있다. 이런 교재는 0번의 교집합이 전체집합 X 가 된다는 점을 자연스럽게 지도하기 어려움으로 인해 나타나는 경우에 해당한다.

※ 유의: ‘유한교집합을 하는 $S \rightarrow B$ ’ 절차에서 0개의 교집합도 고려해야 하며 논리적 이유로 0개의 교집합은 X 가 되고 항상 B 에 X 가 속한다.

그리고 0개의 합집합은 \emptyset 이다.

위의 집합족 B 로부터 위상을 생성하더라도 같은 위상을 생성한다.

즉, 집합족 S 로부터 위상 = T = 집합족 B 로부터 위상

예를 들어, 집합 $X = \{a, b, c\}$ 의 부분집합족 $S = \{\{a, b\}, \{b, c\}\}$ 일 때,

$$S \rightarrow B = \{X, \{a, b\}, \{b, c\}, \{b\}\} \rightarrow T = \{\emptyset, X, \{a, b\}, \{b, c\}, \{b\}\}$$

따라서 S 로 생성한 위상은 $T = \{\emptyset, X, \{a, b\}, \{b, c\}, \{b\}\}$ 이다.

집합 $X = \{a, b, c\}$ 의 부분집합족 $S = \emptyset$ 일 때,

S 로 생성한 위상은 $\{X, \emptyset\}$ 이다.

집합 $X = \{a, b, c\}$ 의 부분집합족 $S = \{X\}$ 일 때,

S 로 생성한 위상은 $\{X, \emptyset\}$

집합 $X = \{a, b, c\}$ 의 부분집합족 $S = \{\{a\}, \{b\}, \{c\}\}$ 일 때,

S 로 생성한 위상은 2^X



3. 기저(base)

[정의] {기저} 위상공간 (X, \mathcal{J}) 의 부분집합족 $B \subset \mathcal{J}$ 에 대하여, 공간 X 의 모든 개집합이 B 의 적당한 원들의 합집합이 될 때, B 를 위상공간 (X, \mathcal{J}) 의 기저(base, basis)라 한다. 즉, 모든 $G \in \mathcal{J}$ 에 대하여 $\bigcup_{i \in I} V_i = G$ 인 개집합 $V_i \in B, i \in I$ 가 존재한다.

기저 B 의 원소를 ‘기저 개집합(basic open set)’이라 한다.

B 가 위상공간 X 의 기저(base)이기 위한 필요충분조건은 임의의 개집합 G 와 임의의 점 $p \in G$ 에 대하여

$p \in V \subset G$ 을 만족하는 $V \in B$ 가 존재하는 것”

이다. 따라서 임의의 개집합은 다음

$$G = \bigcup_{x \in G} V_x \quad (\text{단, } V_x \text{는 } x \in V_x \subset G \text{인 기본 개집합})$$

와 같이 기저 개집합(basic open set)들의 합집합으로 쓸 수 있다.

두 기저(base)로부터 생성된 위상이 같을 때, 두 기저(base)는 동치(equivalent)라고 한다.

집합 X 의 부분 집합족 B 가 다음의 두 가지 조건을 만족한다고 하자.

[정리] X 의 부분집합족 B 가 다음 두 조건 (1), (2)를 만족하면 B 는 B 로 생성한 위상의 기저(base)가 된다.

(1) $X = \bigcup \{U \mid U \in B\}$

(2) 임의의 $U, V \in B, p \in U \cap V$ 에 대하여 $p \in W \subset U \cap V, W \in B$ 가 존재

이 명제를 기저의 정의로 삼는 위상수학 교재도 있다.

[증명] B 로 생성한 위상의 원소는 B 의 원소들의 유한 교집합과 합집합이다. B 가 기저가 되기 위해서는 유한 교집합을 B 의 원소들의 합집합으로 나타낼 수 있으면 된다.

교집합 $U \cap V = X$ 는 (1)에 의하여 B 의 합집합이 된다.

B 의 두 원소 U, V 의 교집합은 (2)에 의하여 $p \in W_p \subset U \cap V, W_p \in B$ 인 W_p 들에 대하여 $U \cap V = \bigcup_{p \in U \cap V} W_p$ 이다.

따라서 B 는 B 로 생성한 위상의 기저이다.

이때, B 의 부분 집합족 $\{G_i \mid i \in I\} \subset B$ 의 합집합 $\bigcup_{i \in I} G_i$ 들 전체로 구성된

집합족 $\mathcal{J}(B)$ 는 위상의 공리를 만족하며 B 는 이 위상의 기저(base)가 된다.

이때 위상 $\mathcal{J}(B)$ 를 기저 B 로부터 생성된 위상이라 한다.



2024 고객선호브랜드지수 1위
교육서비스 부문



2023 고객선호브랜드지수 1위
교육서비스 부문



2022 한국 브랜드 만족지수 1위
교육(교육서비스)부문 1위



2021 대한민국 소비자 선호도 1위
교육부문 1위 선정



2020 한국 산업의 1등
브랜드 대상 수상



2019 한국 우수브랜드평가대상
교육브랜드 부문 수상



2018 대한민국 교육산업 대상
교육서비스 부문 수상



브랜드스타к Bsti
브랜드 가치평가 1위



www.pmg.co.kr

교재관련 문의 02 - 6466-7202

학원관련 문의 02-816-2030

온라인상의 문의 02 - 6466 - 7201

윤양동 임용수학

III

위상수학 미분기하

Mathematics



9 791172 624927



14410

ISBN 979-11-7262-492-7
ISBN 979-11-7262-489-7(SET)

정가 20,000원