제1판

중등임용 전공수학 대비

윤양동 임용수학

III

윤양동 편저

위상수학
미분기하

Mathematics

박문각 임용 동영상강의 www.pmg.co.kr

박문각

차 례

Contents

윤양동

임용수학

Mathematics

PART

1

위상수학

Chapter 01

위상공간(Topological Space)

01 위상공간(Topological space)과 기저(Base)

1. 위상공간(Topological space)

[정의] {위상공간} 공집합이 아닌 집합 X의 부분집합족 $\mathfrak{I}$가 다음 공리계를 만족할 때, $\mathfrak{I}$를 X 위의 위상(topology)이라 하고, 집합 X와 위상 $\mathfrak{I}$의 쌍 $(X, \mathfrak{I})$를 위상공간(topological space)이라 한다.
(1) $X, \varnothing \in \mathfrak{I}$
(2) $\{G_i \mid i \in I\} \subset \mathfrak{I}$에 대하여 합집합 $\bigcup_{i\in I} G_i \in \mathfrak{I}$
(3) $G_1, G_2, \cdots, G_k \in \mathfrak{I}$에 대하여 교집합 $G_1 \cap G_2 \cap \cdots \cap G_k \in \mathfrak{I}$

위상이 분명한 경우 줄여서 위상공간 X 또는 간단히 공간 X라 한다.
위상공간 $(X, \mathfrak{I})$에서 위상 $\mathfrak{I}$에 속하는 X의 부분집합을 개집합(열린 집합, open set)이라 하며,
개집합의 여집합을 폐집합(닫힌 집합, closed set)이라 한다.
간단한 위상공간의 예를 들면 집합 $X=\{0,1\}$에 집합족 $\mathfrak{I}=\{X, \varnothing, \{0\}\}$는 X 위의 위상을 이루며 집합 X, $\varnothing$, $\{0\}$은 개집합(open set)이고 여집합 $\varnothing$, X, $\{1\}$은 폐집합(closed set)이다.
집합 $X=\{a,b,c,d,e\}$에 집합족
$\mathfrak{I}=\{X, \varnothing, \{a\}, \{c,d\}, \{a,c,d\}, \{b,c,d,e\}\}$
는 X 위의 위상을 이루며, 이 위상공간에서 X, $\varnothing$, $\{a\}$, $\{b,c,d,e\}$ 등은 개집합이며, 동시에 폐집합이다. $\{a,b\}$는 개집합도 폐집합도 아니다.
드 모르강(De Morgan) 법칙을 적용하면 다음 정리를 얻는다.

개집합/폐집합은 배타적 개념이 아님

[정리] (1) $X, \varnothing$은 폐집합이다.
(2) 폐집합의 무제한 교집합은 폐집합이다.
(3) 폐집합의 유한번 합집합은 폐집합이다.

한 집합위의 위상들끼리도 다음과 같이 서로 비교할 수 있다.

[정의] {강한 위상, 약한 위상} 집합 X의 두 위상 $\mathfrak{I}_1$, $\mathfrak{I}_2$가 $\mathfrak{I}_1 \subset \mathfrak{I}_2$일 때, $\mathfrak{I}_1$은 $\mathfrak{I}_2$보다 약한 위상(거친 위상, weaker topology)이라 하고, $\mathfrak{I}_2$는 $\mathfrak{I}_1$보다 강한 위상(섬세한 위상, stronger topology)라 한다.

여러 위상들이 주어질 때, 다음 정리와 같이 그 위상들 보다 약한 위상을 구성할 수 있다.

[정리] X의 위상 $\mathfrak{I}_k\,(k\in I)$들에 대하여 $\bigcap_{k\in I}\mathfrak{I}_k$는 X의 위상이다.

모든 $\mathfrak{I}_k$들의 교집합기호 $\bigcap_{k\in I}\mathfrak{I}_k$를 $\bigcap\{\mathfrak{I}_k \mid k\in I\}$로 쓰기도 한다.

또한 합집합기호 $\bigcup_{k\in I}\mathfrak{I}_k$를 $\bigcup\{\mathfrak{I}_k \mid k\in I\}$로 쓰기도 한다.

집합 $X=\{a,b,c\}$의 부분집합족 $S=\{X,\varnothing,\{a,b\},\{b,c\}\}$
에 대하여 $\cap\{\{a,b\},\{b,c\}\}=\{a,b\}\cap\{b,c\}=\{b\}\notin S$
이므로 S는 X의 위상이 될 수 없다.
X의 부분집합족 $B=\{X,\{a\},\{b\},\varnothing\}$에 대하여

$$\cup\{\{a\},\{b\}\}=\{a\}\cup\{b\}=\{a,b\}\notin B$$

이므로 B는 X의 위상이 될 수 없다.
X의 부분집합족 $T=\{\varnothing,X,\{a,b\},\{b,c\},\{b\}\}$는 위상의 공리를 모두 만족하므로 X의 위상이다.

∩, ∪기호에 대한 새로운 약속이다.

두 위상의 합집합은 위상이 아닌 경우도 있으며 두 위상을 모두 포함하는 위상을 구성하려면 단순 합집합외에 더 많은 개집합을 추가해야 할 필요가 있다.
집합 $X=\{a,b,c\}$의 두 위상

$$T_1=\{\varnothing,X,\{a,b\},\{c\}\},\quad T_2=\{\varnothing,X,\{a,b\},\{a\}\}$$

에 대하여 $T_1\cap T_2=\{\varnothing,X,\{a,b\}\}$는 X의 위상이다.
위상 $T_1\cap T_2$는 T_1보다 약한 위상이며 T_2보다 약한 위상이다.
그러나 $T_1\cup T_2=\{\varnothing,X,\{a,b\},\{c\},\{a\}\}$는 X의 위상이 아니다.
X의 부분집합 $T_1\cup T_2$에 몇 가지 집합을 추가하여 위상이 될 수 있도록 구성할 수 있다. 위의 경우에는 집합 $\{a,c\}$을 첨가하면 된다.

$$T_3=\{\varnothing,X,\{a,b\},\{c\},\{a\},\{a,c\}\}$$

T_3는 X의 위상이며 T_3는 T_1보다 강한 위상이며 T_2보다 강한 위상이다.

2. 부분기저(subbase)와 생성

공집합이 아닌 집합 X의 적당한 부분집합들의 족 $S = \{ A_i \subset X \mid i \in I \}$가 있을 때,

J는 첨자집합 I의 부분집합이 아니다.

$$S \;\to\; \underbrace{B = \left\{ A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_n} \mid i_1, \cdots, i_n \in I \right\}}_{\text{유한 교집합}} \;\to\; \underbrace{T = \left\{ \bigcup_{G \in J} G \,\middle|\, J \subset B \right\}}_{\text{무제한 합집합}}$$

이와 같은 절차를 거쳐 구성한 T는 위상의 공리를 만족한다. 이때 T는 S를 포함하는 X의 위상들 중에서 최소 위상이 된다. 이 위상 T를 'S가 생성한 위상'이라 한다.

[정의] {부분기저} 위상공간$(X, \mathfrak{I})$의 개집합족 S에 대하여 S로 생성한 위상이 $\mathfrak{I}$일 때, S를 위상 $\mathfrak{I}$의 부분기저(subbase)라 한다.

위상수학 교재 중에는 "$\bigcup S = X$" 조건을 추가로 요구하는 교재도 있다. 이런 교재는 0번의 교집합이 전체집합 X가 된다는 점을 자연스럽게 지도하기 어려움으로 인해 나타나는 경우에 해당한다.

※ 유의: '유한교집합을 하는 $S \to B$' 절차에서 0개의 교집합도 고려해야 하며 논리적 이유로 0개의 교집합은 X가 되고 항상 B에 X가 속한다.
그리고 0개의 합집합은 $\varnothing$ 이다.

위의 집합족 B로부터 위상을 생성하더라도 같은 위상을 생성한다.
즉, 집합족 S로부터 위상 $= T =$ 집합족 B로부터 위상

예를 들어, 집합 $X = \{ a, b, c \}$의 부분집합족 $S = \{ \{a,b\}, \{b,c\} \}$일 때,
$S \to B = \{ X, \{a,b\}, \{b,c\}, \{b\} \} \to T = \{ \varnothing, X, \{a,b\}, \{b,c\}, \{b\} \}$
따라서 S로 생성한 위상은 $T = \{ \varnothing, X, \{a,b\}, \{b,c\}, \{b\} \}$이다.
집합 $X = \{ a, b, c \}$의 부분집합족 $S = \varnothing$ 일 때,
S로 생성한 위상은 $\{ X, \varnothing \}$이다.
집합 $X = \{ a, b, c \}$의 부분집합족 $S = \{X\}$ 일 때,
S로 생성한 위상은 $\{ X, \varnothing \}$
집합 $X = \{ a, b, c \}$의 부분집합족 $S = \{ \{a\}, \{b\}, \{c\} \}$ 일 때,
S로 생성한 위상은 2^X

3. 기저(base)

[정의] {기저} 위상공간 $(X, \mathfrak{I})$ 의 부분집합족 $B \subset \mathfrak{I}$ 에 대하여, 공간 X 의 모든 개집합이 B의 적당한 원들의 합집합이 될 때, B를 위상공간 $(X, \mathfrak{I})$ 의 기저(base, basis)라 한다.
즉, 모든 $G \in \mathfrak{I}$ 에 대하여 $\bigcup_{i \in I} V_i = G$ 인 개집합 $V_i \in B$, $i \in I$ 가 존재한다.

기저B의 원소를 '기저 개집합(basic open set)'이라 한다.
B가 위상공간 X 의 기저(base)이기 위한 필요충분조건은 임의의 개집합 G 와 임의의 점 $p \in G$ 에 대하여
$p \in V \subset G$을 만족하는 $V \in B$가 존재하는 것"
이다. 따라서 임의의 개집합은 다음

$$G = \bigcup_{x \in G} V_x \quad (\text{단, } V_x \text{는 } x \in V_x \subset G\text{인 기본 개집합})$$

와 같이 기저 개집합(basic open set)들의 합집합으로 쓸 수 있다.
두 기저(base)로부터 생성된 위상이 같을 때, 두 기저(base)는 동치(equivalent)라고 한다.

집합 X 의 부분 집합족 B가 다음의 두 가지 조건을 만족한다고 하자.

[정리] X 의 부분집합족 B 가 다음 두 조건 (1), (2)를 만족하면 B 는 B 로 생성한 위상의 기저(base)가 된다.
(1) $X = \bigcup \{U \mid U \in B\}$
(2) 임의의 $U, V \in B$, $p \in U \cap V$에 대하여 $p \in W \subset U \cap V$, $W \in B$가 존재

이 명제를 기저의 정의로 삼는 위상수학 교재도 있다.

증명 B 로 생성한 위상의 원소는 B 의 원소들의 유한 교집합과 합집합이다.
B가 기저가 되기 위해서는 유한 교집합을 B 의 원소들의 합집합으로 나타낼 수 있으면 된다.
교집합 $\cap \varnothing = X$는 (1)에 의하여 B의 합집합이 된다.
B의 두 원소 U, V 의 교집합은 (2)에 의하여 $p \in W_p \subset U \cap V$, $W_p \in B$ 인 W_p 들에 대하여 $U \cap V = \bigcup_{p \in U \cap V} W_p$ 이다.
따라서 B는 B로 생성한 위상의 기저이다.
이때, B의 부분 집합족 $\{G_i \mid i \in I\} \subset B$의 합집합 $\bigcup_{i \in I} G_i$ 들 전체로 구성된 집합족 $\mathfrak{I}(B)$ 는 위상의 공리를 만족하며 B는 이 위상의 기저(base)가 된다.
이때 위상 $\mathfrak{I}(B)$ 를 기저B 로부터 생성된 위상이라 한다.

박문각 www.pmg.co.kr

교재관련 문의 02 - 6466- 7202
학원관련 문의 02-816-2030
온라인강의 문의 02 - 6466 - 7201

윤양동
임용수학

III

위상수학 미분기하

Mathematics

ISBN 979-11-7262-492-7
ISBN 979-11-7262-489-7(SET)

정가 20,000원