제1판

중등임용 전공수학 대비

윤양동 임용수학

II

윤양동 편저

추상대수학

Mathematics

박문각 임용 동영상강의 www.pmg.co.kr

박문각

차 례

Contents

윤양동

임용수학

Mathematics

CHAPTER

1

군

1. 군과 준동형사상

2. 순환군과 위수

3. 유한생성 가환군의 분류

4. 비가환군과 치환군

5. 정규부분군과 잉여군

Chapter 01

군(Group)

01 군과 준동형사상

1. 군과 가환군

[정의] {군}
공집합이 아닌 집합 G와 G 위에서 정의된 이항연산(binary operation) $\cdot : G \times G \to G$가 다음 조건을 만족할 때, $(G, \cdot)$을 군(Group)이라 한다.
(1) 결합법칙: 모든 G의 원 a, b, c에 대하여 $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$
(2) 항등원의 존재: G의 모든 원 a에 대하여 $a \cdot e = e \cdot a = a$를 만족하는 e가 존재한다.
(3) 역원의 존재: G의 임의의 원 a는 $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = e$를 만족하는 역원 a^{-1}를 갖는다.

특히, 군의 연산이 교환법칙을 만족할 때, 가환(commutative)군 또는 아벨(Abel)군이라 한다.
명제나 증명을 서술할 때, 군의 연산은 곱셈기호로 표기하는 것이 관례이다. 그러나 덧셈기호 또는 별도의 연산기호를 제시한 경우에는 그 기호를 사용해야 한다.
한 원소에 대하여 연산을 반복하는 것을 간단히 표기하기 위하여 다음과 같이 나타내기로 한다.

(1) 연산이 곱셈기호로 주어진 경우

a를 n번 반복 연산한 $a \cdot a \cdot \cdots \cdot a$는 a^n이라 쓴다.
역원 a^{-1}를 n번 반복 연산한 $a^{-1} \cdot a^{-1} \cdot \cdots \cdot a^{-1}$는 a^{-n}이라 쓴다.
n이 0인 경우 a^0는 항등원 e와 같다.

(2) 연산이 덧셈에 관한 가환군으로 주어진 경우

a를 n번 반복 연산한 $a+a+\cdots+a$는 na라 쓴다.
이때, na는 n과 a의 곱셈이 아니다.
a의 역원을 $-a$라 쓰고, $-a$를 n번 반복 연산한 $(-a)+\cdots+(-a)$는 $-na$이라 쓴다.
항등원은 0으로 쓰고, n이 0인 경우 $0a$는 항등원 0과 같다.

2. 준동형사상과 동형사상

[정의] {준동형사상}
두 군 $(G, \cdot)$, $(H, \circ)$ 사이의 함수 $f: G \to H$가 군 G의 모든 원 a, b에 대하여 $f(a \cdot b) = f(a) \circ f(b)$을 만족할 때, f를 준동형사상(homomorphism)이라 한다.

특히, f가 전단 사이면 동형사상(isomorphism)이라 하고, 이때, 두 군 G, H는 동형적(isomorphic)이라 하고 $G \cong H$로 쓴다.
$G = H$인 경우, f가 준동형사상이면, 자기준동형사상(endomorphism), f가 동형사상일 때, 자기동형사상(automorphism)이라 한다.
또한, 상 $\mathrm{Im}(f) = f(G)$, 핵 $\ker(f) = f^{-1}(e')$라 한다. (단, e'는 H의 항등원)
준동형사상 $f: G \to H$에 대하여 $\mathrm{Im}(f) = H$이면 f는 위로의 사상(onto map) 또는 전사사상(epimorphism)일 필요충분조건이 된다.
f가 일대일 사상(1-1 map) 또는 단사사상이 될 조건을 살펴보자.

[정리] 준동형사상 $f: G \to H$에 대하여 f가 단사사상(monomorphism)일 필요충분조건은 $\ker(f) = \{e\}$이다.

증명 $(\rightarrow)$ $a \in \ker(f)$이라 하면 $f(a) = e' = f(e)$
f는 단사사상이므로 $a = e$
따라서 $\ker(f) = \{e\}$
$(\leftarrow)$ $f(a) = f(b)$ 이라 하면
$f(ab^{-1}) = f(a)f(b^{-1}) = f(b)f(b^{-1}) = f(bb^{-1}) = f(e) = e'$이므로
$ab^{-1} \in \ker(f) = \{e\}$
$ab^{-1} = e$, $a = b$
따라서 f는 단사사상이다.

예제 1 유리수의 덧셈에 관한 아벨군$(\mathbb{Q}, +)$과 양의 유리수의 곱셈에 관한 아벨군 $(\mathbb{Q}^+, \times)$은 서로 동형이 아님을 보여라.

증명 $(\mathbb{Q}, +)$와 $(\mathbb{Q}^+, \times)$가 동형이라 가정하자.
이때 동형사상을 $f: \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}^+$라 하자.
그러면 f는 전사이므로 $f(a) = 2$인 $a \in \mathbb{Q}$가 존재한다.
그리고 $f(a) = f(a/2 + a/2) = f(a/2) \times f(a/2) = (f(a/2))^2$이므로
$f(a/2) = \pm\sqrt{2}$
그런데 공역이 양의 유리수 $\mathbb{Q}^+$이므로 $f(a/2) = \sqrt{2} \in \mathbb{Q}^+$이며 $\sqrt{2}$가 무리수이기 때문에 위배된다.
따라서 $(\mathbb{Q}, +)$와 $(\mathbb{Q}^+, \times)$는 동형이 아니다.

3. 부분군(subgroup)과 직적군(direct product group)

[정의] {부분군}
군 $(G, \cdot)$ 의 부분집합 H가 연산 $\cdot$ 에 대하여 군을 이룰 때,
H를 $(G, \cdot)$ 의 부분군이라 하고 $H < G$ 또는 $H \leq G$ 라 쓴다.

특히, 군 G는 자기 자신 G와 항등원 e에 관한 $\{e\}$를 부분군으로 갖는다. 항등원 e에 관한 부분군 $\{e\}$를 자명한 부분군(trivial subgroup)이라 한다.

[정리] 군 $(G, \cdot)$ 의 부분집합 H가 $H \neq \varnothing$ 일 때, 다음은 서로 동치이다.
(1) H는 G의 부분군이다.
(2) H가 연산 $\cdot$ 에 관하여 닫혀있고, 모든 원의 역원을 포함한다.
$(HH \subset H,\ H^{-1} \subset H)$
(3) 모든 $a, b \in H$에 대하여, $a \cdot b^{-1} \in H$이다. $(HH^{-1} \subset H)$

위 명제에서 조건 $H \neq \varnothing$ 을 $e \in H$로 바꿔도 위 정리는 여전히 성립한다.

[정의] {군의 직적, 직합}
두 군 G_1, G_2 의 곱집합 $G_1 \times G_2 = \{(x_1, x_2) \mid x_1 \in G_1, x_2 \in G_2\}$에 대하여 다음과 같이 연산 $(a_1, a_2) \cdot (b_1, b_2) = (a_1 b_1, a_2 b_2)$ 을 부여하여 두 군의 직적군(direct product group) $(G_1 \times G_2, \cdot)$을 정의한다.
일반적으로 군 $G_k\ (k \in I)$들의 직적군 $\left(\prod_{k \in I} G_k, \cdot\right)$의 연산은 다음과 같다.

$$(a_k)_{k \in I} \cdot (b_k)_{k \in I} = (a_k b_k)_{k \in I}$$

두 군 G_1, G_2 가 덧셈에 관한 아벨군일 때, $(G_1 \times G_2, \cdot)$ 를 $(G_1 \oplus G_2, +)$ 라 쓰기도 하며, 직합(direct sum)이라 한다.
군의 직적의 예로서 $S_3 \times Q_8$, 아벨군의 직합의 예는 $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2$, $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ (Klein 4-군) 등이 있다.

[정리] 군 G_1, G_2, H_1, H_2 와 자명한 군 $\{e\}$가 있을 때,
(1) $G \times \{e\} \cong G$
(2) $G_1 \times G_2 \cong G_2 \times G_1$
(3) $G_1 \cong H_1$, $G_2 \cong H_2$ 이면 $G_1 \times G_2 \cong H_1 \times H_2$

증명 (1) 함수 $f : G \to G \times \{e\}$, $f(x) = (x, e)$ 라 정의하면 f가 전단사사상임은 자명하다.
$f(ab) = (ab, e) = (a, e)(b, e) = f(a)f(b)$ 이므로 f는 동형사상이다.
(2) 함수 $f : G_1 \times G_2 \to G_2 \times G_1$, $f(x, y) = (y, x)$ 라 정의하면 f가 전단사사상임은 자명하다.
$f(a, b)f(c, d) = (b, a)(d, c) = (bd, ac) = f(ac, bd) = f((a,b)(c,d))$ 이므로 f는 동형사상이다.

(3) $g_1 : G_1 \to H_1$, $g_2 : G_2 \to H_2$ 를 동형사상이라 하자.

함수 $f : G_1 \times G_2 \to H_1 \times H_2$, $f(x, y) = (g_1(x), g_2(y))$ 라 정의하면 g_1, g_2 가 전단사사상이므로 f 는 전단사사상이다.

$$f(a,b)f(c,d) = (g_1(a), g_2(b))(g_1(c), g_2(d)) = (g_1(a)g_1(c), g_2(b)g_2(d))$$
$$= (g_1(ac), g_2(bd)) = f(ac, bd) = f((a,b)(c,d))$$

이므로 f 는 동형사상이다.

예제 1 군 G 의 부분집합 H 가 유한집합이고, 연산에 닫혀있으면, 부분군임을 보이시오. (단, $H \neq \varnothing$)

증명 군 $(G, \cdot)$ 의 부분집합 H 가 연산 $\cdot$ 에 닫혀있으므로 H 의 임의의 원 h 에 대하여 집합 $\{h, h^2, h^3, \cdots\}$은 H 의 부분집합이며, H 가 유한집합이므로 집합 $\{h, h^2, h^3, \cdots\}$도 유한집합이다. 따라서 $h^n = h^m$ 인 양의 정수 $n, m\ (n < m)$이 존재하며, $h^{m-n} = e$ 로부터 $h\, h^{m-n-1} = e\ (m-n-1 \geq 0)$이다.

$m-n-1=0$ 일 때, $h=e$ 이므로 e 자신이 역원이고, $m-n-1>0$ 일 때, h^{m-n-1} 이 h 의 역원이며 $h^{m-n-1} \in H$ 이므로 h 의 역원이 항상 H 에 속한다.

따라서 H 의 임의 원소의 역원이 H 에 속하므로 H 는 G 의 부분군이다.

예제 2 군 G 의 원소 g 와 부분군 H에 대하여 $g^{-1}Hg$ 도 부분군임을 보이시오.

켤레부분군이라 한다.

증명 H가 군 G의 부분군일 때, $g^{-1}Hg$ 도 부분군임을 보이자.

① 항등원 $e \in H$이므로 $e = g^{-1}eg \in g^{-1}Hg$

② $g^{-1}ag$, $g^{-1}bg \in g^{-1}Hg\ (a, b \in H)$일 때,
$(g^{-1}ag)(g^{-1}bg) = g^{-1}a(gg^{-1})bg = g^{-1}(ab)g$ 이며, H가 부분군이므로 $ab \in H$이다.
따라서 $(g^{-1}ag)(g^{-1}bg) \in g^{-1}Hg$

③ $g^{-1}ag \in g^{-1}Hg\ (a \in H)$일 때, $(g^{-1}ag)^{-1} = g^{-1}a^{-1}g$ 이며, H가 부분군이므로 $a^{-1} \in H$이다. 따라서 $(g^{-1}ag)^{-1} \in g^{-1}Hg$

①, ②, ③으로부터 $g^{-1}Hg$ 는 G의 부분군이다.

예제 3 K, H_1, H_2 는 군 G 의 부분군이며 $K \subset H_1 \cup H_2$ 이면 $K \subset H_1$ 또는 $K \subset H_2$ 임을 보이시오.

풀이 (귀류법) $K \not\subset H_1$ 이고 $K \not\subset H_2$ 이라 가정하자.

$k_1 \in K - H_1$ 이고 $k_2 \in K - H_2$ 인 원소 k_1, k_2 가 있다.

$k_1, k_2 \in K \subset H_1 \cup H_2$ 이므로 $k_2 \in H_1$ 이며 $k_1 \in H_2$ 이다.

$k_1 k_2 \in K \subset H_1 \cup H_2$ 이므로 $k_1 k_2 \in H_1$ 또는 $k_1 k_2 \in H_2$ 이다.

$k_1 k_2 \in H_1$ 인 경우 $k_2 \in H_1$ 이므로 $(k_1 k_2) k_2^{-1} = k_1 \in H_1$ 는 모순이다.

$k_1 k_2 \in H_2$ 인 경우 $k_1 \in H_2$ 이므로 $k_1^{-1}(k_1 k_2) = k_2 \in H_1$ 는 모순이다.

따라서 $K \subset H_1$ 또는 $K \subset H_2$ 이다.

2024 고객선호브랜드지수 1위
교육서비스 부문

2023 고객선호브랜드지수 1위
교육서비스 부문

2022 한국 브랜드 만족지수 1위
교육(교육서비스)부문 1위

2021 대한민국 소비자 선호도 1위
교육부문 1위 선정

2020 한국 산업의 1등
브랜드 대상 수상

2019 한국 우수브랜드평가대상
교육브랜드 부문 수상

2018 대한민국 교육산업 대상
교육서비스 부문 수상

브랜드스탁 BSTI
브랜드 가치평가 1위

박문각 www.pmg.co.kr

교재관련 문의 02 - 6466- 7202
학원관련 문의 02-816-2030
온라인강의 문의 02 - 6466 - 7201

윤양동
임용수학

II

추상대수학

Mathematics

ISBN 979-11-7262-491-0
ISBN 979-11-7262-489-7(SET)

정가 17,000원