임용 전공물리 Master Key 시리즈

정승현

열 및 통계물리학
양자역학

정승현 편저

박문각 임용 동영상강의 www.pmg.co.kr
박문각 PMG

임용 전공물리 Master Key 시리즈

정승현

열 및 통계물리학
양자역학

정승현 편저

임용 박문각 물리 기출 동영상강의 www.pmg.co.kr

박문각 PMG

PREFACE

머리말

열역학은 물질의 열적 특성을 이해하고 설명하는 학문으로, 물질의 열에 의한 운동을 분석하는 데 초점을 둡니다. 또한 우리 주변에서 일어나는 현상들을 설명하고 예측하는 데 중요한 역할을 합니다. 예를 들어, 자동차의 엔진, 냉장고, 에어컨, 난방 시스템 등의 열적인 기기를 설계되며, 대기 및 해양 열전달과 같은 현상을 이해하는 데 활용되고 있습니다.
통계역학은 열역학에서 발전한 학문으로, 분자운동론을 기반으로 하여 열에 의한 에너지의 전달 및 변환에 관해 연구합니다. 자연 상태에서 우리는 열이 고온에서 저온으로, 연기가 주변으로 자연스럽게 퍼지는지에 대해 경험적 이해로 그친 상태에서 이유를 알지 못했습니다. 볼츠만은 이를 통계적 확률로 설명하고 엔트로피라는 개념을 도입하였는데, 통계의 핵심은 단순합니다. 우리가 정의 가능하고, 측정 가능한 물리적 개념으로부터 시간이 지날 때 시스템의 변화를 이해하는 데 있습니다. 그리고 이 시간의 흐름을 엔트로피가 대체합니다. 그래서 물리 학문 중 거의 유일하게 통계역학에서 시간이라는 변수가 등장하지 않는 것입니다.

20세기 발견된 학문 중 가장 영향력이 강력한 분야는 양자역학이라고 해도 무방합니다. 그만큼 최첨단 시대에 모든 전자기기는 이 양자역학을 기반으로 만들어졌습니다. 양자역학은 결정론적 세계관의 붕괴를 일으켰습니다. 그리고 우리의 일반적인 상식과 인식에 반하는 현상을 보여 이해하는 데 어려움이 큰 학문입니다. 동전을 던져 바닥에 떨어뜨리면 앞면과 뒷면이 결정이 납니다. 땅에 떨어지기 전에는 앞면과 뒷면이 공존상태인데 이것이 양자역학에서 말하는 관측 전 상태입니다. 측정 전에는 물질의 상태가 정해지지 않고, 중첩된 상태라는 게 양자역학에서 말하는 핵심입니다. 양자역학에서 양자란 측정 가능한 불연속이라는 말입니다. 양자 세계에서는 모든 것이 불연속입니다. 위치, 운동량, 에너지 등등 우리가 측정하려고 하는 모든 것이 양자 세계에서는 불연속으로 이루어져 있습니다. 우리가 모니터나 TV로 영상을 관측할 때, 연속적 움직임을 보이지만 사실 아주 작은 불연속적인 픽셀들이 불연속적인 빛의 밝기의 조합으로 구성되는 것을 관측할 뿐입니다. 양자역학은 관측 전에는 모든 것이 중첩된 상태이고, 관측되면 불연속적인 것들 중 하나의 값을 얻을 수 있습니다. 그래서 양자역학을 한 줄로 정의한다면 '중첩된 세계의 관측적 디지털화'라고 할 수 있습니다.

이 책은 수학적으로 엄밀함을 추구하기보다는 물리적 이해를 돕기 위함에 초점을 맞춰 기술하였습니다. 제가 이해하는 열 및 통계역학과 양자역학이 임용을 공부하는 여러분에게 세르파 역할을 하길 바랍니다.

저자 정승현

가이드 물리에 필요한 수학

1. 벡터 및 좌표계

(1) 두 벡터의 내적(Inner product, scalar product, dot product)

두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$의 내적은 다음과 같이 정의된다.

$$\vec{a} = (a_1,\ a_2),\ \vec{b} = (b_1,\ b_2)$$

$$\vec{a}\quad\vec{b} \equiv |\vec{a}||\vec{b}|cos(\theta) = a_1b_1 + a_2b_2$$

벡터의 내적은 상대벡터로 연직선을 그렸을 때 두 벡터의 수평성분의 곱이다.

(2) 두 벡터의 외적(vector product, cross product)

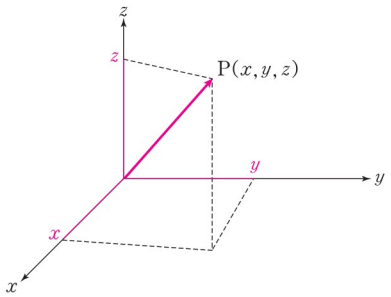
두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$의 외적은 다음과 같이 정의된다.

$$\vec{a}\times\vec{b} \equiv |\vec{a}||\vec{b}|sin(\theta)\vec{n}$$

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = (a_yb_z - a_zb_y)\hat{x} + (a_zb_x - a_xb_z)\,\hat{y} + (a_xb_y - a_yb_x)\hat{z}$$

벡터의 외적은 두 벡터가 이루는 평행사변형의 넓이와 방향은 평행사변형과 수직한 방향이다. 회전 파트에서 주로 사용된다.

(3) 좌표계



① **직교 좌표계**: x, y, z축 각 수직을 이루는 3차원 일반적인 좌표계이다. 평행이동 대칭성이 있어서 일반적인 병진운동에서 많이 활용된다.

직교 좌표계는 회전 대칭성과는 별개로 평행이동 대칭성을 관계에 있으므로 단위벡터를 시간에 대해 미분한 값 즉, $\frac{d\hat{x}}{dt} = \frac{d\hat{y}}{dt} = \frac{d\hat{z}}{dt} = 0$

- 단위벡터: $\hat{x}$, $\hat{y}$, $\hat{z}$
- 위치, 속도, 가속도

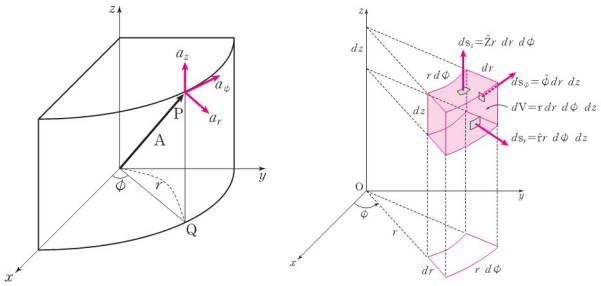
$$\vec{s} = \overrightarrow{OP} = (x,\ y,\ z) = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{s}}{dt} = (v_x,\ v_y,\ v_z) = \dot{x}\hat{x} + \dot{y}\hat{y} + \dot{z}\hat{z}$$

$$\vec{a} = \frac{d^2\vec{s}}{dt^2} = (a_x,\ a_y,\ a_z) = \ddot{x}\hat{x} + \ddot{y}\hat{y} + \ddot{z}\hat{z}$$

- 미소 부피: $dV = dxdydz$

② **원통형 좌표계**: ρ, ϕ, z축 각 수직을 이루는 3차원 좌표계이다. x, y평면 회전 대칭성 및 z축 평행이동 대칭성이 있다.



- **단위벡터 $\hat{\rho}$, $\hat{\phi}$, $\hat{z}$**: 원통형 좌표계에서 단위벡터 $\hat{\rho}$, $\hat{\phi}$는 회전 대칭성을 가지므로 회전하게 되면 시간에 따라 단위벡터의 방향이 바뀌게 된다. 즉, 시간에 대한 상수가 아니다.

- **위치, 속도, 가속도**

$$\vec{s} = \overrightarrow{OP} = (x,\ y,\ z) = (\rho\cos\phi,\ \rho\sin\phi,\ z) = \vec{\rho} + \vec{z} = \rho\hat{\rho} + z\hat{z}$$

$$\frac{d\vec{s}}{dt} = (\dot{\rho}cos\phi - \rho\dot{\phi}\sin\phi,\ \dot{\rho}\sin\phi + \rho\dot{\phi}\cos\phi,\ \dot{z}) = \dot{\rho}\hat{\rho} + \rho\dot{\phi}(-\sin\phi, \cos\phi) + \dot{z}\hat{z}$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{s}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{\rho} + \vec{z}) = \frac{d}{dt}(\rho\hat{\rho} + z\hat{z}) = \dot{\rho}\hat{\rho} + \rho\dot{\hat{\rho}} + \dot{z}\hat{z}$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{s}}{dt} = (v_\rho, v_\phi, v_z) = \dot{\rho}\hat{\rho} + \rho\dot{\phi}\hat{\phi} + \dot{z}\hat{z}$$

$$\therefore\ \dot{\hat{\rho}} = \dot{\phi}\hat{\phi}$$

$$\hat{\phi} = (-\sin\phi,\ \cos\phi)$$

$$\dot{\hat{\phi}} = \dot{\phi}(-\cos\phi,\ -\sin\phi) = -\dot{\phi}\hat{\rho}$$

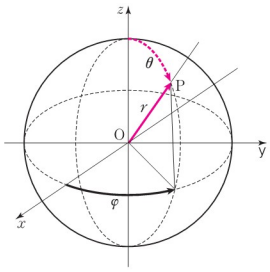
$$\vec{a} = (a_\rho,\ a_\phi,\ a_z) = \frac{d}{dt}(\dot{\rho}\hat{\rho} + \rho\dot{\phi}\hat{\phi} + \dot{z}\hat{z})$$

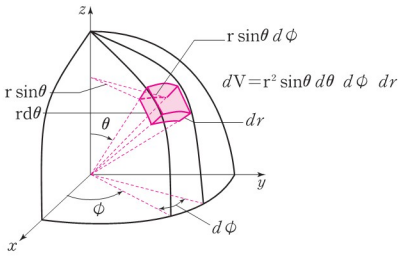
$$= \ddot{\rho}\hat{\rho} + \dot{\rho}\dot{\hat{\rho}} + \dot{\rho}\dot{\phi}\hat{\phi} + \rho\ddot{\phi}\hat{\phi} + \rho\dot{\phi}\dot{\hat{\phi}} + \ddot{z}\hat{z}$$

$$= (\ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2)\hat{\rho} + (\rho\ddot{\phi} + 2\dot{\rho}\dot{\phi})\hat{\phi} + \ddot{z}\hat{z}$$

- **미소 부피**: $dV = d\rho(\rho d\phi)dz = \rho\, d\rho d\phi dz$

③ 구면 좌표계: r, θ, ϕ축 각 수직을 이루는 3차원 좌표계이다. ϕ, θ회전 대칭성이 있다.





- 단위벡터: r, $\hat{\theta}$, $\hat{\phi}$구면 좌표계에서 $\hat{r}$, $\hat{\theta}$, $\hat{\phi}$는 회전 대칭성을 가지므로 회전하게 되면 시간에 따라 단위벡터의 방향이 바뀌게 된다. 즉, 시간에 대한 상수가 아니다.
- 위치, 속도

$$\vec{s} = \overrightarrow{OP} = (x,\ y,\ z) = (r\sin\theta\cos\phi,\ r\sin\theta\sin\phi,\ r\cos\theta) = r\hat{r}$$

$$\frac{d\vec{s}}{dt} = (\dot{r}\sin\theta\cos\phi + r\dot{\theta}\cos\theta\cos\phi - r\dot{\phi}\sin\theta\sin\phi,$$
$$\dot{r}\sin\theta\sin\phi + r\dot{\theta}\cos\theta\sin\phi + r\dot{\phi}\cos\phi,\ \dot{r}\cos\theta - r\dot{\theta}\sin\theta)$$
$$= \dot{r}\hat{r} + r\sin\theta\,\dot{\phi}(-\sin\phi, \cos\phi, 0) + r\dot{\theta}(\cos\theta\cos\phi, \cos\theta\sin\phi, -\sin\theta)$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{s}}{dt} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\hat{r}}$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{s}}{dt} = (v_r,\ v_\theta,\ v_\phi) = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta} + r\sin\theta\dot{\phi}\hat{\phi}$$

$$\therefore\ \dot{\hat{r}} = \dot{\theta}\hat{\theta} + \sin\theta\dot{\phi}\hat{\phi}$$

- 미소 부피: $dV = dr(r\sin\theta d\phi)rd\theta = r^2\sin\theta\, drd\theta d\phi$

2. 미적분 공식

(1) 3차원 미분 연산자 ▽

① $gradient\ \vec{\nabla} f$: 기하적 의미는 특정 좌표에서 기울기를 의미한다.

- 직교좌표계(x, y, z): $\nabla f = (\frac{\partial f}{\partial x},\ \frac{\partial f}{\partial y},\ \frac{\partial f}{\partial z})$
- 원통좌표계(ρ, ϕ, z): $\nabla f = (\frac{\partial f}{\partial \rho},\ \frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial \phi},\ \frac{\partial f}{\partial z})$
- 구면좌표계(r, θ, ϕ): $\nabla f = (\frac{\partial f}{\partial r},\ \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta},\ \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \phi})$

② Divergence $\vec{\nabla}\cdot\vec{F}$: 기하학적 의미는 특정 좌표계에서 각 좌표축 방향으로 이동 성분을 의미한다. 즉, 중심에 대해 퍼져나가는 성분을 말한다.

- 직교좌표계$(x,\ y,\ z)$: $\nabla\cdot F=\dfrac{\partial F_x}{\partial x}+\dfrac{\partial F_y}{\partial y}+\dfrac{\partial F_z}{\partial z}$
- 원통좌표계$(\rho,\ \phi,\ z)$: $\nabla\cdot F=\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial}{\partial\rho}(\rho F_\rho)+\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial F_\phi}{\partial\phi}+\dfrac{\partial F_z}{\partial z}$
- 구면좌표계$(r,\ \theta,\ \phi)$: $\nabla\cdot F=\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial}{\partial r}(r^2F_r)+\dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta F_\theta)+\dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial F_\phi}{\partial\phi}$

③ Curl $\vec{\nabla}\times\vec{F}$: 기하적 의미는 특정 좌표계에서 각 좌표축을 회전축으로 회전 성분을 의미한다. 즉, 중심에 대해 회전 성분을 말한다.

- 직교좌표계$(x,\ y,\ z)$

$$\nabla\times F=\begin{vmatrix}\hat{x} & \hat{y} & \hat{z}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ F_x & F_y & F_z\end{vmatrix}=\left(\frac{\partial F_z}{\partial y}-\frac{\partial F_y}{\partial z},\ \frac{\partial F_x}{\partial z}-\frac{\partial F_z}{\partial x},\ \frac{\partial F_y}{\partial x}-\frac{\partial F_x}{\partial y}\right)$$

- 원통좌표계$(\rho,\ \phi,\ z)$

$$\nabla\times F=\frac{1}{\rho}\begin{vmatrix}\hat{\rho} & \rho\hat{\phi} & \hat{z}\\ \dfrac{\partial}{\partial\rho} & \dfrac{\partial}{\partial\phi} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ F_\rho & \rho F_\phi & F_z\end{vmatrix}=\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial F_z}{\partial\phi}-\frac{\partial F_\phi}{\partial z}\right)\hat{\rho}+\left(\frac{\partial F_\rho}{\partial z}-\frac{\partial F_z}{\partial\rho}\right)\hat{\phi}+\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho F_\phi)-\frac{1}{\rho}\frac{\partial F_\rho}{\partial\phi}\right)\hat{z}$$

- 구면좌표계$(r,\ \theta,\ \phi)$

$$\nabla\times F=\frac{1}{r^2\sin\theta}\begin{vmatrix}\hat{r} & r\hat{\theta} & r\sin\theta\hat{\phi}\\ \dfrac{\partial}{\partial r} & \dfrac{\partial}{\partial\theta} & \dfrac{\partial}{\partial\phi}\\ F_r & rF_\theta & (r\sin\theta)F_\phi\end{vmatrix}$$

$$=\frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta F_\phi)-\frac{\partial F_\theta}{\partial\phi}\right]\hat{r}+\frac{1}{r}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial F_r}{\partial\phi}-\frac{\partial}{\partial r}(rF_\phi)\right]\hat{\theta}+\frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(rF_\theta)-\frac{\partial F_r}{\partial\theta}\right]\hat{\phi}$$

(2) 가우스 발산 법칙

$$\int\vec{\nabla}\cdot\vec{F}dV=\int\vec{F}\cdot d\vec{S}$$

가우스 발산 법칙은 벡터장 $\vec{F}$의 발산, 즉 뻗어나가는 성분을 알아내는데 사용된다.

(3) 스토크스 법칙

$$\int (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot d\vec{S} = \int \vec{F} \cdot d\vec{l}$$

스토크스 법칙은 벡터장 $\vec{F}$의 회전 성분을 알아내는데 사용된다.

3. 행렬

1차식 $x + by = m$, $cx + dy = n$일 때 행렬로 표현하면

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}$$

복잡한 1차 방정식의 해를 동시에 구하거나 해의 존재성을 판명할 때 사용된다.

※ 회전 변환

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

▲ 점의 회전 변환

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

▲ 좌표축의 회전 변환

4. 삼각함수 공식

(1) 피타고라스 정리

- $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$
- $1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$
- $1 + \cot^2\theta = \mathrm{cosec}^2\theta$

(2) 삼각함수 합차 공식

- $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$
- $\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$
- $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$
- $\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$
- $\tan(\alpha+\beta) = \dfrac{\tan\alpha + \tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$
- $\tan(\alpha-\beta) = \dfrac{\tan\alpha - \tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$

(3) 삼각함수 두배각 공식

- $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$
- $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$
  $= 2\cos^2\theta - 1$
  $= 1 - 2\sin^2\theta$
- $\tan 2\theta = \dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$

(4) 삼각함수 반각 공식

- $\cos^2\theta = \dfrac{1+\cos 2\theta}{2}$
- $\sin^2\theta = \dfrac{1-\cos 2\theta}{2}$

(5) 삼각함수 합성 공식

- $\sin A + \sin B = 2\sin\left(\dfrac{A+B}{2}\right)\cos\left(\dfrac{A-B}{2}\right)$
- $\sin A - \sin B = 2\cos\left(\dfrac{A+B}{2}\right)\sin\left(\dfrac{A-B}{2}\right)$
- $\cos A + \cos B = 2\cos\left(\dfrac{A+B}{2}\right)\cos\left(\dfrac{A-B}{2}\right)$
- $\cos A - \cos B = -2\sin\left(\dfrac{A+B}{2}\right)\sin\left(\dfrac{A-B}{2}\right)$

CONTENTS

차 례

Part 02 양자역학

정승현
열 및 통계물리학
양자역학

Part 01

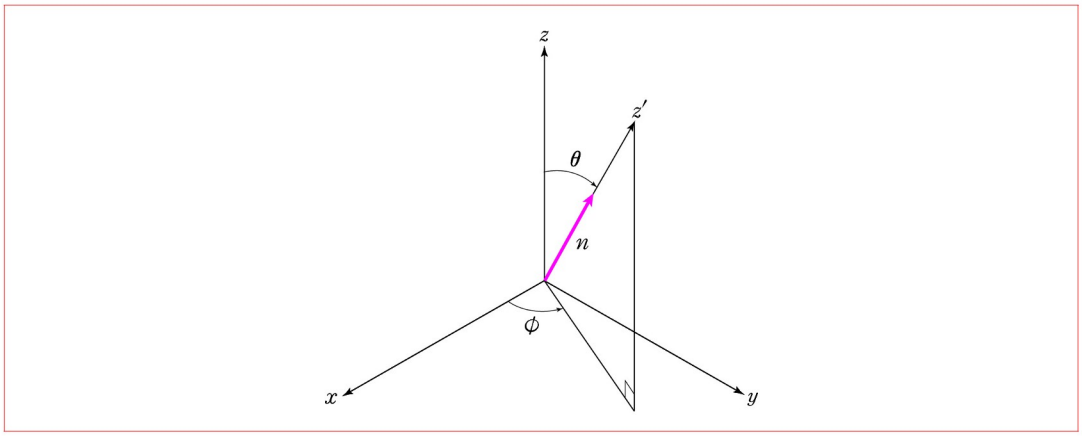
열 및 통계물리학

Chapter

07 LS, SS 커플링

01 스핀의 일반적인 해(회전 변환의 이해)

우리는 이전 시간에 스핀의 특정 축(x, y, z)에 대한 스핀 연산자와 고유함수를 배웠다. 그렇다면 아래 그림과 같이 임의의 방향에 대한 스핀 연산자와 고유함수는 어떻게 되는지 알아보자.



스핀 연산자 $\vec{S}=(S_x,\ S_y,\ S_z)$는 벡터 성질을 만족한다. (주의해야 할 것은 파울리 스핀 행렬은 벡터 성질을 만족하지 않으니 조심해야 한다. 즉, 벡터연산은 파울리 스핀행렬에 $\frac{\hbar}{2}$가 곱해진 스핀 연산자로 해야 한다.)

우리는 $t=0$인 시간에 θ, ϕ각을 이루는 위치에서 스핀 상태(업/다운)를 관측하였다. 이때의 방향은 $\hat{n}=(\sin\theta\cos\phi,\ \sin\theta\sin\phi,\ \cos\phi)$이다.

$$\vec{S}=(S_x,\ S_y,\ S_z)$$

$$\begin{aligned}S_{z'}&=\vec{S}\cdot\hat{n}=S_x\sin\theta\cos\phi+S_y\sin\theta\sin\phi+S_z\cos\theta\\&=\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\sin\theta\cos\phi+\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix}\sin\theta\sin\phi+\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\cos\theta\\&=\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}\cos\theta&\sin\theta\cos\phi-i\sin\theta\sin\phi\\\sin\theta\cos\phi+i\sin\theta\sin\phi&-\cos\theta\end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$\therefore\ S_{z'}=\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}\cos\theta&\sin\theta e^{-i\phi}\\\sin\theta e^{i\phi}&-\cos\theta\end{pmatrix}$$

$$S_{z'}\psi_{z'}^{+}=\frac{\hbar}{2}\psi_{z'}^{+},\ \ S_{z'}\psi_{z}^{-\prime}=-\frac{\hbar}{2}\psi_{z'}^{-\prime}\ \ \left[\because\ \psi_{z'}^{+}=\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix},\ \psi_{z}^{-\prime}=\begin{pmatrix}c\\d\end{pmatrix}\right]$$

$S_{z'}\psi_{z'}^{+}$ ➡ $a\cos\theta + b\sin\theta\, e^{-i\phi} = a,\ a\sin\theta e^{i\phi} - b\cos\theta = b$

$$a = \frac{(1+\cos\theta)e^{-i\phi}}{\sin\theta}b \ \ (\because\ |a|^2 + |b|^2 = 1)$$

$$|b|^2\left(\frac{(1+\cos\theta)^2 + \sin^2\theta}{\sin^2\theta}\right) = 1$$

$$|b|^2 = \frac{\sin^2\theta}{2+2\cos^2\theta} = \frac{4\sin^2\frac{\theta}{2}\cos^2\frac{\theta}{2}}{4\cos^2\frac{\theta}{2}} = \sin^2\frac{\theta}{2}$$

$let\ \ b = \sin\frac{\theta}{2}e^{i\phi},\ \ a = \cos\frac{\theta}{2}$

$$\psi_{z'}^{+} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2}e^{i\phi} \end{pmatrix}$$

비슷한 방식으로 $\psi_{z'}^{-} = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin\frac{\theta}{2}e^{-i\phi} \\ \cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$

결과적으로 임의의 축에 대한 스핀 연산자와 고유함수를 정리하면 아래와 같다.

$$S_{z'} = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta e^{-i\phi} \\ \sin\theta e^{i\phi} & -\cos\theta \end{pmatrix}$$

고유값 $+\frac{\hbar}{2}$일 때, 고유함수 $\psi_{z'}^{+} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2}e^{i\phi} \end{pmatrix}$

고유값 $-\frac{\hbar}{2}$일 때, 고유함수 $\psi_{z'}^{-} = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin\frac{\theta}{2}e^{-i\phi} \\ \cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$

위 식 $S_{z'} = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta e^{-i\phi} \\ \sin\theta e^{i\phi} & -\cos\theta \end{pmatrix}$로 부터 파울리 스핀 행렬을 구해보자.

1. $\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$는 $\theta = \frac{\pi}{2}$이고 $\phi = 0$일 때이다.

고유벡터는 각각 $\psi_x^{+} = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2}e^{i\phi} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ \psi_x^{-} = \begin{pmatrix} -\sin\frac{\theta}{2}e^{-i\phi} \\ \cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

2. $\sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$는 $\theta = \frac{\pi}{2}$이고 $\phi = \frac{\pi}{2}$일 때이다.

고유벡터는 각각 $\psi_y^+ = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2}e^{i\phi} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$, $\psi_y^- = \begin{pmatrix} -\sin\frac{\theta}{2}e^{-i\phi} \\ \cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$

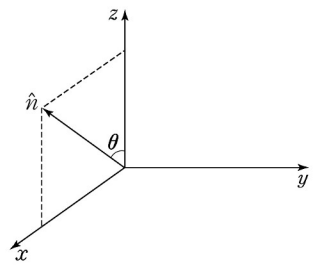
3. $\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$는 $\theta = 0$일 때이다.

고유벡터는 각각 $\psi_z^+ = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2}e^{i\phi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\psi_z^- = \begin{pmatrix} -\sin\frac{\theta}{2}e^{-i\phi} \\ \cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

즉, 파울리 스핀 행렬은 임의의 스핀을 특정 축으로 가져오는 회전변환 행렬이다.

예제 1 스핀 양자수가 $\frac{1}{2}$이고 전하량이 e, 질량이 m인 입자가 균일한 자기장 영역에 존재한다. 자기장은 $\vec{B} = B_0\hat{z}$이고 입자의 스핀 연산자는 $\vec{S}$이다. 이때 입자의 해밀토니안은 다음과 같다. $H = wS_z$, 여기서 $w \equiv \frac{|e|B_0}{mc}$이고, c는 빛의 속력이다. $t=0$일 때, 입자의 스핀 연산자 $\vec{S}\cdot\hat{n}$의 고유값이 $\frac{\hbar}{2}$인 상태이다. 여기서 $\hat{n}$은 xz평면상에서 z축과 각 θ만큼 기울어진 단위벡터이다.

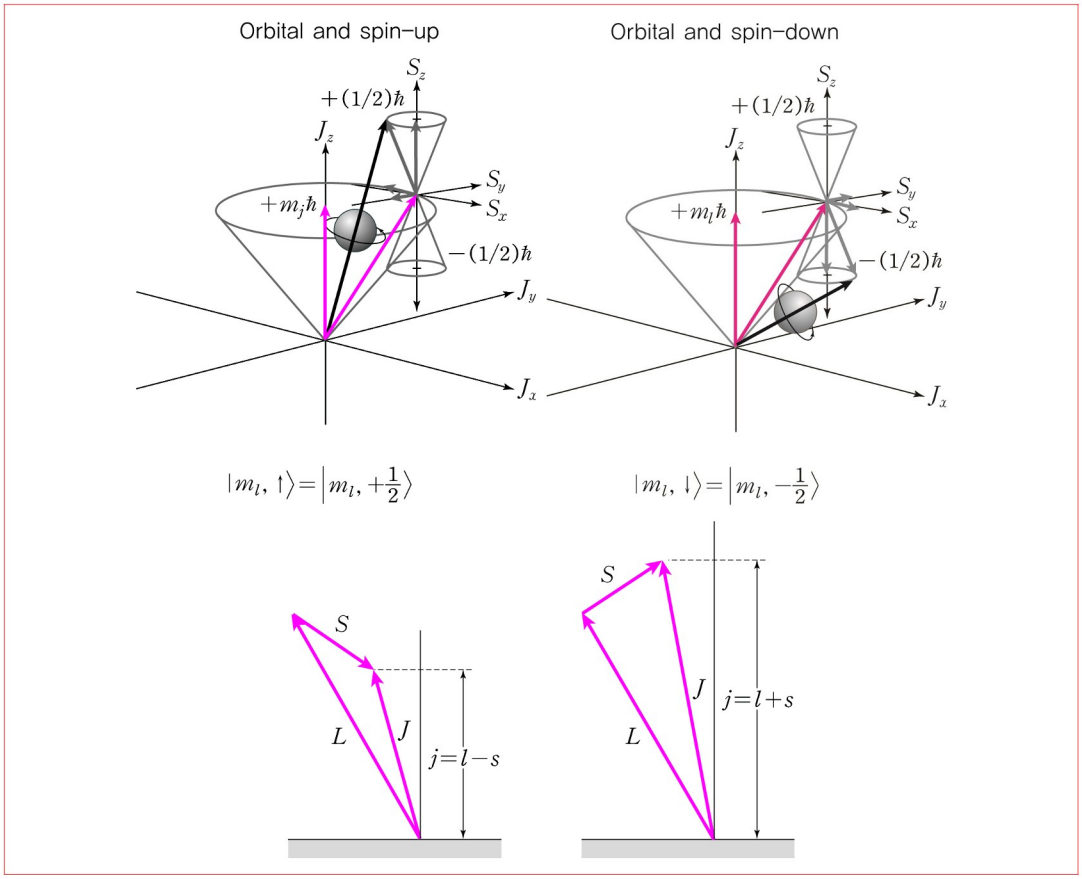


이때 $t>0$에서 입자의 스핀 고유함수 $|\chi(t)\rangle$를 풀이 과정과 함께 구하시오. 또한 S_y의 고유값이 $+\frac{\hbar}{2}$가 될 확률과 x축 스핀의 기댓값 $\langle S_x \rangle$를 각각 구하시오. (단, $S_x = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $S_y = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$, $S_z = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$이고, B_0은 상수이다.)

02 LS 커플링

1. 총 각운동량 $J = L + S$

전자의 공전에 의한 각운동량 L과 자전에 의한 스핀 각운동량 S에 의해 총 각운동량 J가 형성이 된다. 이는 크기와 방향이 양자와 되어 있으므로 다음을 만족해서 구하면 된다.



$\vec{J}^2 = (\vec{L} + \vec{S})^2 = L^2 + S^2 + 2\vec{L} \cdot \vec{S}$

각각의 고유값은 $J^2 \Rightarrow j(j+1)\hbar^2$, $L^2 \Rightarrow l(l+1)\hbar^2$, $S^2 \Rightarrow s(s+1)\hbar^2$

$j = |l - s|,\ |l - s| + 1,\ \cdots,\ l + s$: 총 각운동량 양자수

$m_j = -j,\ -j+1,\ \cdots,\ +j$: 총 방위 양자수

$J^2 |jm_j ls\rangle = j(j+1)\hbar^2 |jm_j ls\rangle$

일반적으로 각운동량과 스핀의 결합에 의한 해밀토니안 성분은 $H_{LS} = c\vec{L} \cdot \vec{S}$이다. (여기서 c는 상수)

연습문제

01 전자가 각운동량 양자수 $l=1$인 상태의 원자에 속박되어 있다. x축 방향의 각운동량 연산자 L_x는 다음과 같다.

$$L_x = \frac{\hbar}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

그리고 입자의 파동함수는 $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{14}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$이다. 이때 L_x의 고유값 λ_1, λ_2그리고 λ_3를 모두 구하고 고유값에 해당하는 고유함수 ϕ_1, ϕ_2그리고 ϕ_3를 구하시오. 또한 λ_2를 측정할 확률 P_2를 구하시오.(단, $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$이다.)

13-33

02 수소원자의 각운동량 연산자는 $\vec{L} = (L_x,\ L_y,\ L_z)$이다. L^2과 L_z의 규격화된 공통고유상태는 $|l\,m\rangle$이며, l은 궤도 양자수, m은 자기 양자수이다. 한 수소원자의 각운동량 상태가 $|\psi\rangle = \frac{2}{\sqrt{5}}|1\,1\rangle + \frac{1}{\sqrt{5}}|2\,1\rangle$일 때, 이에 대한 설명으로 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? (단, $\hbar = \frac{h}{2\pi}$, h는 플랑크 상수이다.)

보기

ㄱ. L_z의 측정값이 $\hbar$일 확률은 1이다.

ㄴ. L^2의 측정값이 $2\hbar^2$일 확률은 $\frac{1}{5}$이다.

ㄷ. L^2의 기댓값은 $\frac{8\hbar^2}{5}$이다.

① ㄱ
② ㄴ
③ ㄷ
④ ㄱ, ㄷ
⑤ ㄴ, ㄷ

03 시스템의 해밀토니안은 다음과 같다.

$$H = \frac{1}{2}\frac{\overrightarrow{L^2}}{I} + \alpha L_z$$

I와 α는 양의 상수이다. 시간 $t=0$에서 파동함수는 $|l,\ m\rangle$의 선형결합으로 이루어져있고, 다음과 같이 주어진다.

$$|\psi(t=0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{5}}(|2,\ 0\rangle + 2i|2,\ -1\rangle)$$

1) $[H,\ L_x]$, $[H,\ L_y]$, $[H,\ L_z]$을 구하시오.

2) 시간 $t>0$에서 파동함수 $|\psi(t)\rangle$를 구하시오.

3) 시간 $t>0$에서 측정 가능한 에너지를 모두 구하고, 각 에너지를 측정할 확률을 구하시오.

4) 에너지 기댓값 $\langle E\rangle$과 $\langle L_z\rangle$의 기댓값을 각각 구하시오.

04 물체가 xy평면에서 자유롭게 회전운동을 하고 있다. 이때 물체의 z축에 대한 회전 관성모멘트는 I_z이다. xy평면에서 x축에 대한 회전각을 θ라 할 때 입자의 해밀토니안은 다음과 같다.

$$H = -\frac{\hbar^2}{2I_z}\frac{d^2}{d\theta^2}$$

1) 시간에 따른 전체 파동함수 $\psi(\theta,\ t)$라 할 때, $\psi(\theta,\ 0) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m\phi_m = \frac{2}{\sqrt{3\pi}}\sin^2\theta$으로 표현된다. $\psi(\theta,\ 0)$의 에너지 고유값을 모두 구하고, 각 에너지에 대한 측정 확률을 구하시오.

2) 시간 $t>0$에서 전체 파동함수 $\psi(\theta,\ t)$를 구하시오.

Part 01 열 및 통계물리학 연습문제 정답

Chapter 01 열역학

01 1) $\frac{v_{나}}{v_{가}}=\sqrt{2}$, 2) $\Delta S=\frac{5}{2}R\ln 2$

02 1) $\frac{P_B}{P_C}=32$, 2) $e=\frac{3-2\ln 2}{3}$

03 1) $V=eV_0$, 2) $\eta=\frac{2}{7}$

04 1) $\frac{V_C}{V_A}=2^{\frac{5}{2}}$, 2) $S=\frac{5}{2}nRT_0(1-\ln 2)$, 3) $e=1-\ln 2$

05 1) $\frac{U_A}{U_B}=1$, 2) $\frac{N_A}{N_B}=\sqrt{2}$

06 1) $\frac{V_C}{V_A}=4$, 2) $\Delta S_{BC}=nR\ln 2$

07 1) $\frac{W_{AB}}{W_{CD}}=\frac{T_L}{T_H}$, 2) $e=1-\frac{T_L}{T_H}$

08 1) $T'=\frac{7T_1T_2}{T_1+6T_2}$, 2) $P'=\frac{7}{3}P$

09 1) $P_B=\frac{3}{2}P_0$, $P_C=\frac{1}{2}P_0$, 2) $e=\frac{2\ln 2}{3+3\ln 2}$

10 1) $\frac{|Q_{out}|}{P_0V_0}=\frac{27}{2}$, 2) $\frac{|W|}{P_0V_0}=1+8\ln 2$

11 1) $T=\frac{kx^2}{R}$, 2) $Q=\frac{5}{2}kl^2$, 3) $\Delta S=4R\ln\frac{3}{2}$

12 1) $W=\pi\alpha^2P_0V_0$, 2) $\Delta E=-3\alpha P_0V_0$, 3) $\Delta S=\frac{5}{2}R\ln\left(\frac{1+\alpha}{1-\alpha}\right)$

Chapter 02 열통계역학의 기본

01 1) $U = Nk_BT$, 2) $p = \dfrac{Nk_BT}{V}$

02 $k = \dfrac{1}{3}$

03 1) $S(T,\ V,\ N) = S_0 + Nk\ln\left[\left(\dfrac{3}{2}\dfrac{NkT}{U_0}\right)^{\frac{3}{2}}\left(\dfrac{N_0}{N}\right)^{\frac{5}{2}}\left(\dfrac{V}{V_0}\right)\right]$

2) $C_V = \left(\dfrac{\partial Q}{\partial T}\right)_V = \left(\dfrac{\partial U}{\partial T}\right)_V = T\left(\dfrac{\partial S}{\partial T}\right)_V = \dfrac{3}{2}Nk$

3) $F(T,\ V,\ N) = U - TS = \dfrac{3}{2}NkT - TS_0 - NkT\ln\left[\left(\dfrac{T}{T_0}\right)^{\frac{3}{2}}\left(\dfrac{N_0}{N}\right)^{\frac{5}{2}}\left(\dfrac{V}{V_0}\right)\right]$

04 1) $\Delta S(T,\ V) = C_V\ln\dfrac{T}{T_0} + Nk\ln\dfrac{V-Nb}{V_0-Nb}$, 2) $\Delta U(T,\ V) = C_V(T-T_0) - N^2a\left(\dfrac{1}{V} - \dfrac{1}{V_0}\right)$

05 $p_c = \dfrac{a}{27b^2}$, $V_c = 3b$, $T_c = \dfrac{8a}{27bnR}$

06 1) $P_{도} = \dfrac{2^5\times 3}{5^4}$, $P_{걸} = \dfrac{2^3\times 3^3}{5^4}$, 2) $S_{걸} - S_{도} = k\ln\dfrac{9}{4} = 2k\ln\dfrac{3}{2}$

07 1) 5J, 6J, 7J, 2) 5J : 3가지, 6J : 9가지 7J : 3가지, 3) 엔트로피는 $S = k\ln\Omega$이므로 Ω가지 수가 가장 높은 6J일 때가 엔트로피가 가장 높다.

08 1) $\dfrac{P_B}{P_A} = 24$, 2) $S_B - S_A = k\ln\left(\dfrac{\Omega_B}{\Omega_A}\right) = k\ln\left(\dfrac{P_B}{P_A}\right) = k\ln 24$

09 1) $T = \dfrac{T_1+T_2}{2}$, 2) $\Delta S = \dfrac{5Nk}{2}\ln\left(\dfrac{(T_1+T_2)^2}{4T_1T_2}\right)$

10 1) $F = -2smB - kT\left[N\ln N - \left(\dfrac{N}{2}+s\right)\ln\left(\dfrac{N}{2}+s\right) - \left(\dfrac{N}{2}-s\right)\ln\left(\dfrac{N}{2}-s\right)\right]$

2) $E_{평형} = -NmB\tanh x$ $[where\ x = m\beta B]$

정승현

열 및 통계물리학
양자역학

초판인쇄 | 2023. 5. 10. **초판발행** | 2023. 5. 15. **편저자** | 정승현
발행인 | 박 용 **발행처** | (주)박문각출판 **등록** | 2015년 4월 29일 제2015-000104호
주소 | 06654 서울특별시 서초구 효령로 283 서경 B/D **팩스** | (02)584-2927
전화 | 교재 문의 (02) 6466-7202, 동영상 문의 (02) 6466-7201

ISBN 979-11-6987-094-8 | 979-11-6987-091-7(SET)
정가 19,000원

2022 한국 브랜드 만족지수 1위
교육(교육서비스)부문 1위

2021 조선일보 국가브랜드 대상
에듀테크 부문 수상

2021 대한민국 소비자 선호도 1위
교육부문 1위 선정

2020 한국산업의 1등
브랜드 대상 수상

2019 한국우수브랜드
평가대상 수상

2018 대한민국 교육산업 대상
교육서비스 부문 수상

2017 대한민국 고객만족
브랜드 대상 수상

2017 한국소비자선호도 1위
브랜드 대상 수상

2016 한국 소비자
만족지수 1위 선정

브랜드스탁 BSTI
브랜드 가치평가 1위

정승현

열 및 통계물리학
양자역학

교재관련 문의 02-6466-7202
학원관련 문의 02-816-2030
온라인강의 문의 02-6466-7201

PMG 박문각 www.pmg.co.kr

9 791169 870948
14420
ISBN 979-11-6987-094-8
ISBN 979-11-6987-091-7(SET)

정가 19,000원